Задание № 4

Задача 1

Решить уравнение $(4x+3)^2(2x+5)(x-1)+45=0.$

Решение.

Преобразуем уравнение.

$$(4x+3)^2(2x+5)(x-1)+45=0;$$

$$(16x^2+24x+9)(2x^2+3x-5)+45=0;$$

$$(8(2x^2+3x)+9)((2x^2+3x)-5)+45=0.$$

Обозначим, $y = 2x^2 + 3x$, тогда уравнение примет вид

$$(8y+9)(y-5)+45=0;$$

$$8y^2-31y-45+45=0;$$

$$y(8y-31)=0;$$

$$y_1=0,\ \ y_2=\frac{31}{8}.$$

Возвращаясь к замене, получаем

$$2x^2+3x=0 \qquad \text{или} \qquad 2x^2+3x=\frac{31}{8};$$

$$x(2x+3)=0; \qquad 2x^2+3x-\frac{31}{8}=0;$$

$$x_1=0,\ \ x_2=-1{,}5. \qquad D=3^2+4\cdot 2\cdot\frac{31}{8}=9+31=40;$$

$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{40}}{4}=\frac{-3\pm 2\sqrt{10}}{4}.$$

Ответ. $x=0;\ \ x=-1{,}5;\ \ x=\dfrac{-3\pm 2\sqrt{10}}{4}.$

Задача 2

Докажите, что число $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ является целым.

Решение.

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, а числитель и знаменатель второй дроби на $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Получим

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}-$$

$$-\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{3})}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{4-3}}-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{4-3}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}.$$

Преобразуем подкоренные выражения

$$4-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2;$$

$$4+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2;$$

Тогда, учитывая, что $\sqrt{3}-1>0$ и $\sqrt{3}+1>0$ получаем:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|-\left|\sqrt{3}+1\right|=\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}-1)=$$
$$=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1=-2.$$

Таким образом, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=-2$. Так как –2 – число целое, то и $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ – число целое, **что и требовалось доказать.**

Задача 3

Найти значения параметра a, при которых равносильны уравнения $a(3a-2)x^2-(3a-2)x-12a+8=0$ и $(a+1)(3ax+37)=3(8a^2+17)+(2a+2)x$.

Решение.

Два уравнения называются равносильными, если их множества решений совпадают. Уравнения, не имеющие решений, являются равносильными.

Определим количество решений для каждого из уравнений при различных значениях параметра. Для обоих уравнений допустимым является любое значение параметра.

Рассмотрим уравнение $a(3a-2)x^2-(3a-2)x-12a+8=0$. Оно является квадратным уравнением с параметром. Определим количество решений этого уравнения при различных значениях параметра a.

1. $a(3a-2)=0$, $a=0$ или $a=\frac{2}{3}$.

При $a=0$ уравнение примет вид $0\cdot x^2+2x+8=0$, $2x=-8$, $x=-4$, то есть при $a=0$ уравнение имеет один корень $x=-4$.

При $a=\frac{2}{3}$ уравнение примет вид $0\cdot x^2-0\cdot x+0=0$, следовательно, решением этого уравнения является любое действительное x.

2. $a(3a-2)\neq 0$, $a\neq 0$ и $a\neq\frac{2}{3}$.

При этих значениях параметра количество корней квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена.

$D=(3a-2)^2-4\cdot a(3a-2)\cdot(-12a+8)=(3a-2)^2+16a(3a-2)^2=(3a-2)^2\cdot(1+16a)$.

Так как $a\neq\frac{2}{3}$, то $(3a-2)^2>0$, следовательно, знак дискриминанта квадратного трехчлена совпадает со знаком выражения $1+16a$.

При $\underline{1+16a>0}$ и $a\neq 0$ и $a\neq\frac{2}{3}$, то есть при $a>-\frac{1}{16}$ и $a\neq 0$ и $a\neq\frac{2}{3}$ квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

При $1+16a=0$ и $a\neq 0$ и $a\neq$ и $a\neq\frac{2}{3}$, то есть при $a=-\frac{1}{16}$ квадратное уравнение имеет один действительный корень $x=\frac{3a-2}{2a(3a-2)}=\frac{1}{2a}=-8$.

При $\underline{1+16a<0}$ и $a\neq 0$ и $a\neq\frac{2}{3}$, то есть при $a<-\frac{1}{16}$ квадратное уравнение действительных корней не имеет.

Таким образом, уравнение $a(3a-2)x^2-(3a-2)x-12a+8=0$

– при $a = \frac{2}{3}$ имеет корнем любое действительное x;

– при $a = 0$ имеет один корень $x = -4$;

– при $a = -\frac{1}{16}$ имеет один корень $x = -8$;

– при $a > -\frac{1}{16}$ и $a \neq 0$ и $a \neq \frac{2}{3}$ имеет два различных действительных корня;

– при $a < -\frac{1}{16}$ действительных корней не имеет.

Рассмотрим уравнение $(a+1)(3ax+37)=3(8a^2+17)+(2a+2)x$. Преобразуем это уравнение.

$$(a+1)(3ax+37)=3(8a^2+17)+(2a+2)x;$$

$$3a(a+1)x+37a+37=24a^2+51+2(a+1)x;$$

$$3a(a+1)x-2(a+1)x=24a^2-37a-37+51;$$

$$(a+1)(3a-2)x=24a^2-37a+14.$$

Разложим $24a^2-37a+14$ на множители:

$$24a^2-37a+14=24a^2-16a-21a+14=(24a^2-16a)-(21a-14)=$$
$$=8a(3a-2)-7(3a-2)=(8a-7)(3a-2).$$

Тогда уравнение принимает вид

$$(a+1)(3a-2)x=(8a-7)(3a-2).$$

Определим количество решений уравнения при различных значениях параметра a.

1. $(a + 1)(3a - 2) = 0$, $a = -1$ или $a = \frac{2}{3}$.

При $\underline{a = -1}$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 14$, следовательно, уравнение действительных корней не имеет.

При $\underline{a = \frac{2}{3}}$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, следовательно, корнем уравнения является любое действительное x.

2. $(a + 1)(3a - 2) \neq 0$, $a \neq -1$ и $a \neq \frac{2}{3}$.

При $a \neq -1$ и $a \neq \frac{2}{3}$ уравнение имеет один корень $x = \frac{(8a-7)(3a-2)}{(a+1)(3a-2)} = \frac{8a-7}{a+1}$.

Таким образом, уравнение $(a+1)(3ax+37) = 3(8a^2+17)+(2a+2)x$

– при $a = -1$ действительных корней не имеет;

– при $a = \frac{2}{3}$ имеет корнем любое действительное x

– при $a \neq -1$ и $a \neq \frac{2}{3}$ имеет один корень $x = \frac{8a-7}{a+1}$.

Сравним количество корней уравнений и сами корни при различных значениях параметра a.

– При $a = \frac{2}{3}$ корнем каждого из уравнений является любое действительное значение x, следовательно, при $a = \frac{2}{3}$ уравнения равносильны.

– Так как $-1 < -\frac{1}{16}$, то при $a = -1$ оба уравнения действительных корней не имеют, следовательно, являются равносильными.

– При $a \neq -1$ и $a \neq \frac{2}{3}$ второе уравнение имеет один корень, значит, уравнения могут оказаться равносильными только в том случае, когда первое уравнение также имеет один корень и эти корни совпадут. Первое уравнение имеет один корень при $a = 0$ или $a = -\frac{1}{16}$.

При $a = 0$ корнем первого уравнения является $x = -4$, корнем второго уравнения является $x = \frac{8a-7}{a+1} = -7 \neq -4$, следовательно, при $a = 0$ уравнения равносильными не являются.

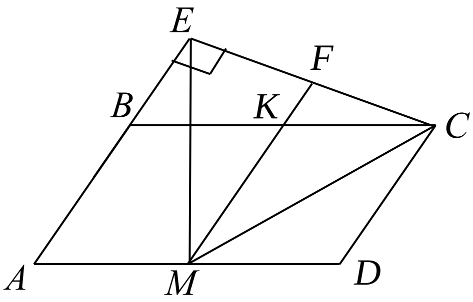
При $a = -\frac{1}{16}$ корнем первого уравнения является $x = -8$, корнем второго уравнения является $x = \frac{8a-7}{a+1} = -8$, следовательно, при $a = -\frac{1}{16}$ уравнения равносильны.

Ответ. $a = \frac{2}{3}$, $a = -1$, $a = -\frac{1}{16}$.

Задача 4

В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ острый, $CE \perp AB$, $BC = 2AB$, M – середина AD. Докажите, что $\angle EMD = 3\angle AEM$.

Решение.



Проведем $MF \parallel AB$, $MF \cap BC = \{K\}$, $MF \cap EC = \{F\}$.

Рассмотрим четырехугольник $MKCD$. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$, $M \in AD$, $K \in BC$, $MK \parallel AB$, тогда $MK \parallel CD$, $CK \parallel MD$, следовательно, $MKCD$ – параллелограмм по определению. Так как $BC = 2AB$, M – середина AD, $AB = CD$, $AD = BC$ как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$, то $MD = 0{,}5AD = 0{,}5BC = AB = CD$, значит, $MKCD$ – ромб по признаку, следовательно, MC – биссектриса $\angle KMD$ по свойству ромба, то есть $\angle KMC = \angle CMD$.

Так как $CE \perp AB$ и $MF \parallel AB$, то $CE \perp MF$. Рассмотрим четырехугольник $AECD$. $AE \parallel CD$, $\angle A < 90°$, $\angle AEC = 90°$, тогда $\angle A + \angle AEC < 180°$, $\angle A$ и $\angle AEC$ – односторонние при прямых AD и CE и секущей AE, значит, прямые AD и CE не являются параллельными, следовательно, $AECD$ – трапеция с основаниями AE и CD. M – середина AD, $MF \parallel AE$, следовательно, MF – средняя линия $AECD$ по признаку, значит, F – середина CE.

Рассмотрим ΔCME. F – середина CE, $CE \perp MF$, значит, MF – медиана и высота ΔCME, следовательно, ΔCME – равнобедренный с основанием CE по признаку, тогда MF – биссектриса ΔCME по свойству равнобедренного треугольника, то есть $\angle EMF = \angle FMC$.

$\angle AEM = \angle EMF$ как накрест лежащие при $MF \parallel AB$ и секущей ME. Так как $\angle EMD = \angle EMF + \angle FMC + \angle CMD$, $\angle EMF = \angle FMC$, $\angle FMC = \angle CMD$, то $\angle EMD = 3\angle EMF = 3\angle AEM$, **что и требовалось доказать.**

Задача 5

Дорога от A к B длиной в 11,5 км идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. Пешеход, идя от A к B, прошел всю дорогу за 2 часа 54 мин, а на обратный путь он затратил 3 час 6 мин. Скорость его движения в гору 3 км/ч, по ровному месту 4 км/ч, под гору 5 км/ч. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту?

Решение.

Пусть длина участка дороги по ровному месту равна x км, тогда длина остальной части дороги равна $(11{,}5-x)$ км. Так как пешеход прошел пусть от A к B и обратно, то по ровному месту пешеход прошел $2x$ км за весь путь, а в гору и под гору он прошел по $(11{,}5-x)$ км за весь путь, затратив на пусть от A к B и обратно 6 ч. На дорогу по ровному месту пешеход затратил $\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$ (ч), на дорогу в гору – $\frac{11{,}5-x}{3}$ (ч), а на дорогу под гору – $\frac{11{,}5-x}{5}$ (ч). Всего на весь путь пешеход затратил $\frac{x}{2}+\frac{11{,}5-x}{3}+\frac{11{,}5-x}{5}$ (ч), что составило 6 ч. Получаем уравнение

$$\frac{x}{2}+\frac{11{,}5-x}{3}+\frac{11{,}5-x}{5}=6;\ |\cdot 30$$

$$15x+10\cdot(11{,}5-x)+6\cdot(11{,}5-x)=180;$$

$$15x+115-10x+69-6x=180;$$

$$x=4.$$

Таким образом, дорога по ровному месту составляет 4 км.

Ответ. 4 км.