ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА

(2023-2024 учебный год)

Задание 1

Задача 1

Михаил решил с января по май прочитать 10 умных книг, по две в месяц. Сколько у него есть способов распределить книги для чтения по месяцам?

Решение

1 способ. Вариантов упорядочить 10 книг - $10! = 10 \cdot 9 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (10 возможностей выбрать первую книгу для чтения, затем – 9 возможностей выбрать вторую и так далее.) Возьмём любое упорядочение книг. Распределение книг по месяцам не изменится, если поменяем местами первую и вторую книгу в списке, или третью и четвертую, …, то есть каждому уникальному распределению соответствуют 2^5 упорядочений. Таким образом, способов распределить книги по месяцам –

$$\frac{10!}{2^5} = 113400.$$

2 способ. Способов выбрать две книги для чтения в первый месяц - $C_{10}^2 = 45$. После этого, способов выбрать две книги для второго месяца - $C_8^2 = 28$ и так далее. Общее количество способов –

$$C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 113400.$$

Ответ: 113400.

Задача 2

В трех коробках осталось по несколько спичек, причем во втором – на 6 спичек больше, чем в первом. Из каждого коробка по очереди, начиная с первого, вынули половину спичек и разложили поровну в оставшиеся два. После этого спичек в коробках оказалось поровну. Сколько спичек изначально было в третьем коробке?

Решение

Пусть в коробках осталось по x спичек:

$$x, x, x$$

Перед последним действием в коробке 3 спичек было в 2 раза больше, то есть $2x$, и распределялось x спичек, то есть в первом и втором коробках было $x/2$ спичек:

$$\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 2x$$

Перед перекладыванием спичек из второго коробка в коробке 2 было x спичек, а распределялись $x/2$ спичек, то есть в первом и третьем коробках спичек было на $x/4$ меньше:

$$\frac{x}{4}, x, \frac{7x}{4}.$$

Наконец, перед первым перекладыванием в первом коробке было $(x/4) \cdot 2 = x/2$ спичек, распределялось $x/4$ спичек, то есть количество спичек в коробках

$$\frac{x}{2}, \frac{7x}{8}, \frac{13x}{8}.$$

По условию задачи,

$$\frac{7x}{8} - \frac{x}{2} = 6,$$

$$x = 16,$$

в третьем коробке было изначально $13 \cdot 16 : 8 = 26$ спичек.

Ответ: 26.

Задача 3

В банке одновременно были открыты два вклада на два года каждый. Через год банк увеличил все вклады на 10%, через два – на 12%. Второй вклад изначально был на *x* рублей меньше, где *x*- натуральное число, но в начале второго года его пополнили на сумму, на пять процентов превышающую *x*. Найдите наименьшее значение *x*, при котором через два года на первом счету стало на целое число десятков рублей больше, чем на втором.

Решение

Пусть P рублей – размер первого вклада, тогда через два года на первом счету стало $P \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}12$ рублей.

Размер второго вклада вначале был равен $P - x$ рублей, через год - $(P - x) \cdot 1{,}1$ рублей, после пополнения - $(P - x) \cdot 1{,}1 + 1{,}05 \cdot x = 1{,}1 \cdot P - 0{,}05 \cdot x$ рублей,

в конце второго года - $(1{,}1 \cdot P - 0{,}05 \cdot x) \cdot 1{,}12$ рублей.

Разность наращенных сумм на первом и втором счетах равна

$P \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}12 - (1{,}1 \cdot P - 0{,}05 \cdot x) \cdot 1{,}12 = 1{,}12 \cdot 0{,}05 \cdot x = 0{,}056 \cdot \mathrm{x}$.

По условию, $0{,}056 \cdot \mathrm{x} = 10 \cdot a$, где a – целое число.

Таким образом,

$$x = \frac{10a}{0{,}056} = \frac{10000}{56} a = \frac{1250}{7} a.$$

Так как число 1250 не делится на 7, наименьшее целое значение x получим при $a = 7$, то есть $x = 1250$.

Ответ: 1250.

Задача 4

Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

$$x^2 - (a + b)x + 27 = 0,$$

$$x^2 - b(b - 9)x + c^6 = 0,$$

$$x^4 - b(b - 9)x^2 + c^6 = 0.$$

Каждое из них имеет, по крайней мере, один действительный корень. Все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения, и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найдите числа a, b, c при условии, что $b > 11$.

Решение

Пусть корни первого уравнения - x_1 и x_2, корни второго - x_1 и x_3.

Применим теорему Виета к первому и второму уравнению:

$$x_1 x_2 = 27, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = a + b \quad (2)$$

$$x_1 x_3 = c^6, \quad (3)$$

$$x_1 + x_3 = b(b - 9) \quad (4)$$

Из равенств (3), (4) следует, что произведение чисел x_1 и x_3 неотрицательное, сумма – положительная, поэтому $x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Кроме того, из (1) следует, что числа x_1 и x_2 не равны нулю и имеют один знак. Таким образом, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Если в третьем уравнении сделаем замену переменной $x^2 = t$, получим квадратное уравнение, которое имеет корни x_1 и x_3. Таким образом, корни третьего уравнения –

$$\sqrt{x_1}, -\sqrt{x_1}, \sqrt{x_3}, -\sqrt{x_3}.$$

По условию задачи, x_1 и x_2 – корни третьего уравнения. Возможны следующие случаи.

1) $x_1 = \sqrt{x_1}$. Тогда x_1=1, $x_2 = 27$, $x_3 = 27^2$.

Из (3) и (4) получаем

$$c^6 = 27^2, b(b - 9) = 1 + 27^2 = 730.$$

Таким образом,

$$c = \pm 3, b = (9 \pm \sqrt{811})/2.$$

Учитывая условие $b > 11$, получаем $b = (9 + \sqrt{811})/2$.

Из равенства (2) находим

$$a = x_1 + x_2 - b = \frac{47 - \sqrt{811}}{2}.$$

2) $x_1 = x_2 = \sqrt{x_3}$. Тогда из (1) получаем $x_1 = x_2 = \sqrt{27}$, $x_3 = 27$.

Подставим в (4):

$$b(b-9) = \sqrt{27} + 27,$$

$$b = \frac{9 + \sqrt{189 + 12\sqrt{3}}}{2}.$$

Сравним полученное значение b и 11.

$$\frac{9 + \sqrt{189 + 12\sqrt{3}}}{2} \ ?\ 11$$

$$\sqrt{189 + 12\sqrt{3}} \ ?\ 13$$

$$189 + 12\sqrt{3} > 169.$$

Из равенства (3) находим $c = \pm\sqrt[4]{27}$, из (2) -

$$a = 6\sqrt{3} - \frac{9 + \sqrt{189 + 12\sqrt{3}}}{2} = \frac{12\sqrt{3} - 9 - \sqrt{189 + 12\sqrt{3}}}{2}.$$

3) $x_1 = \sqrt{x_3}$, $x_2 = \sqrt{x_1}$. Из (1) получаем $x_2 = 3$, $x_1 = 9$. Следовательно, $x_3 = 81$.

Из равенства (3) находим $c = \pm 3$, из (4) –

$b(b-9) = 90$, $b = 15$,

из (2) - $a = -3$.

Ответ: $a = -3$, $b = 15$, $c = \pm 3$;

$$a = \frac{47 - \sqrt{811}}{2}, b = \frac{9 + \sqrt{811}}{2}, c = \pm 3;$$

$$a = \frac{12\sqrt{3} - 9 - \sqrt{189 + 12\sqrt{3}}}{2}, b = \frac{9 + \sqrt{189 + 12\sqrt{3}}}{2}, c = \pm\sqrt[4]{27}.$$

Задача 5

Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ перпендикулярна основаниям. На ней как на диаметре построена окружность, которая пересекает CD в точках K и L так, что $CK : KL : LD = 1 : 3 : 3$. Найти площадь трапеции, если $AD = 6$.

Решение

Пусть $CK = x$, тогда $KL = LD = 3x$. По теореме о касательной и секущей, получаем

$$BC^2 = CK \cdot CL, AD^2 = DL \cdot DK,$$

то есть $BC^2 = x \cdot 4x = 4x^2$, $36 = 3x \cdot 6x = 18x^2$,

$$x = \sqrt{2},\ BC = 2\sqrt{2},\ CD = 7x = 7\sqrt{2}.$$

Проведем высоту *CH*. В прямоугольном треугольнике *CHD*

$$HD = AD - BC = 6 - 2\sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора

$$CH^2 = CD^2 - HD^2 = 98 - \left(6 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 54 + 24\sqrt{2} = 6\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2.$$

Площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + 6\right)\sqrt{6}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) = 7\sqrt{6}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Ответ: $7\sqrt{6}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.