ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2023-2024 учебный год)

Задание 2

Задача 1

Решите ребус

```
********   | ?
***        | ***8**
  * **
***
**
**
***
***
0
```

Решение

Рассмотрим ход выполнения деления столбиком. При умножении делителя на первую цифру частного получаем трехзначное число, вторая цифра частного – 0, далее опять трехзначное число. При умножении делителя на 8 получается двузначное число, следующая цифра частного – 0, и при умножении делителя на последнюю цифру числа снова получаем трехзначное число. Таким образом, делитель – двузначное число, произведение которого на 8 – двузначное число. Этому условию удовлетворяют числа 10, 11 и 12. Остальными ненулевыми цифрами частного могут быть только девятки. Но произведения чисел 10 и 11 на 9 – двузначные числа, поэтому делитель может равняться только 12. Частное при этом равно 909809, а делимое – 10917708:

```
10 9 1 7 7 0 8   | 12
108              | 90 98 0 9
11 7
108
   9 7
96
    1 0 8
108
0
```

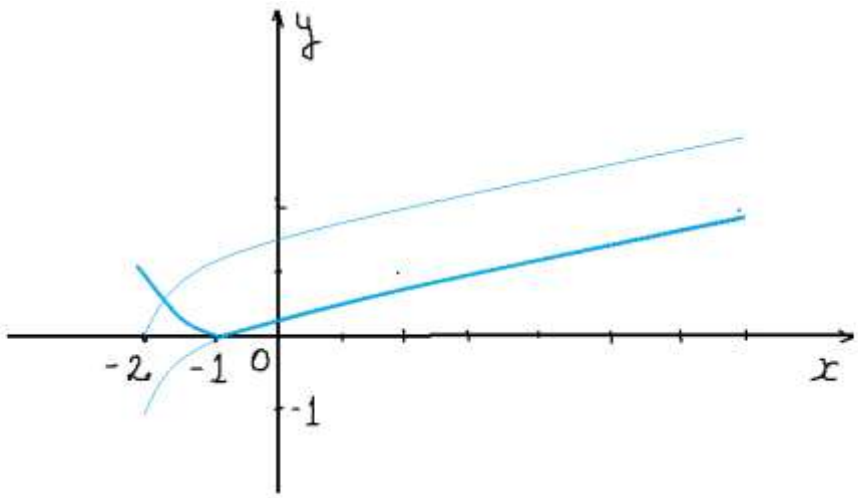
Задача 2

Постройте график функции

$$y = \sqrt{x + 3 - 2\sqrt{x + 2}}.$$

Решение

Преобразуем выражение под знаком корня: $x + 3 - 2\sqrt{x + 2} = \left(\sqrt{x + 2} - 1\right)^2$.
Таким образом, $y = \left|\sqrt{x + 2} - 1\right|$.
Функция определена при $x \geq -2$.
График функции $y = \sqrt{x}$смещаем на 2 единицы влево и на единицу вниз – получаем график функции $y = \sqrt{x + 2} - 1$.
Часть графика, лежащую ниже оси x, симметрично отражаем от оси x.



Задача 3

Решите неравенство

$$\left(x^2 + 91 + \sqrt{(x^2 + 91)^2 + 1}\right)\left(20x + \sqrt{400x^2 + 1}\right) < 1.$$

Решение

Обозначим $x^2 + 91 = t$, $20x = v$. Неравенство примет вид

$$\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)\left(v + \sqrt{v^2 + 1}\right) < 1.$$

Так как $\sqrt{t^2 + 1} > |t|$, оба сомножителя положительны.
Умножим обе части неравенства на $\sqrt{t^2 + 1} - t > 0$:

$$v + \sqrt{v^2 + 1} < \sqrt{t^2 + 1} - t,$$

Умножим обе части неравенства на $\sqrt{v^2 + 1} - v > 0$:

$$t + \sqrt{t^2 + 1} < \sqrt{v^2 + 1} - v.$$

Складывая получившиеся неравенства, получаем

$$t + v < 0.$$

Так как $t > 0$, $v < -t$, $|v| > t$,

$$\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)<\left(-v+\sqrt{v^2+1}\right)\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)=1.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+20x+91<0.$$

Решая его, получаем ответ.

Ответ: $-13<x<-7$.

Задача 4

При каких a уравнение

$$x^4+3x^3+3x^2+ax+12=0$$

имеет единственный корень?

Решение

Пусть x_0 – единственный корень уравнения. Поделив многочлен $P(x)=x^4+3x^3+3x^2+ax+12$ на $x-x_0$ получим многочлен третьей степени. Так как кубическое уравнение всегда имеет хотя бы один корень, этим корнем может быть только x_0, амногочлен $P(x)$можно представить в виде

$$P(x)=(x-x_0)^2(x^2+bx+c).$$

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$P(x)=x^4+(b-2x_0)x^3+(c-2bx_0+x_0^2)x^2+(bx_0^2-2cx_0)x+cx_0^2,$$

$$b-2x_0=3,$$

$$c-2bx_0+x_0^2=3,$$

$$bx_0^2-2cx_0=a,$$

$$cx_0^2=12.$$

Из первого, второго и четвертого равенств получаем

$$b=2x_0+3,$$

$$c=2bx_0-x_0^2+3=3x_0^2+6x_0+3,$$

$$3x_0^4+6x_0^3+3x_0^2=12,$$

то есть

$$x_0^4+2x_0^3+x_0^2-4=0,$$

$$(x_0+2)(x_0^3+x_0-2)=0,$$

$$(x_0+2)(x_0-1)(x_0^2+x_0+1)=0$$

Таким образом, единственным корнем уравнения может быть только $x_0=1$или $x_0=-2$.
Пусть $x_0=1$. Тогда $b=5$, $c=12$. Из третьего уравнения получаем $a=-19$. Уравнение $x^2+10x+12=0$не имеет действительных корней.
Пусть $x_0=-2$. Тогда $b=-1$, $c=3$. Из третьего уравнения получаем $a=8$. Уравнение $x^2-x+3=0$не имеет действительных корней.

Ответ:$a=-19$, $a=8$.

Задача 5

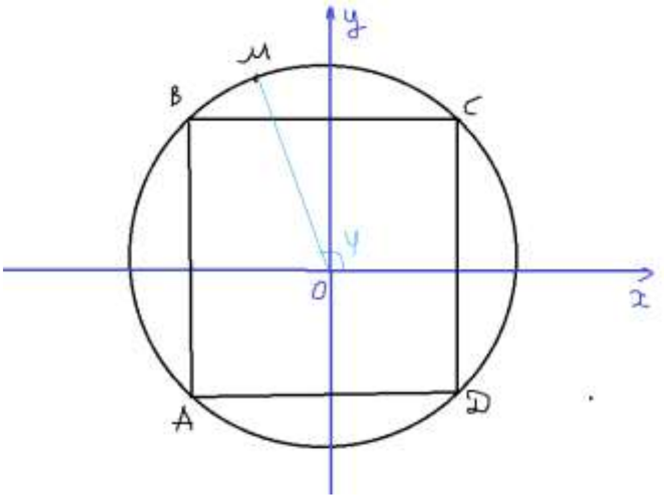
Точка M лежит на окружностирадиуса 7, в которую вписан квадрат$ABCD$ и около которой описан квадрат$EFGI$. Найдите

$$AM^2 - EM^2 + BM^2 - FM^2 + CM^2 - GM^2 + DM^2 - IM^2.$$

Решение

Рассмотрим вписанный квадрат и найдём $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$.Сторона квадрата равна $7\sqrt{2}$. Введём на плоскости систему координат с началом в центре окружности и с осями, параллельными сторонам квадрата. Тогда координаты вершин квадрата –

$$A(-7\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/2), B\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, 7\sqrt{2}/2\right), C(7\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/2), D(7\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/2).$$



Пусть φ – угол между вектором OM и осьюх.Тогда координаты точки М - $(7\cos\varphi, 7\sin\varphi)$.

$$AM^2 = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\cos\varphi\right)^2 + \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\sin\varphi\right)^2 = 49\left(2 + \sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right),$$

$$BM^2 = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\sin\varphi\right)^2 = 49\left(2 + \sqrt{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)\right),$$

$$CM^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\sin\varphi\right)^2 = 49\left(2 - \sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right),$$

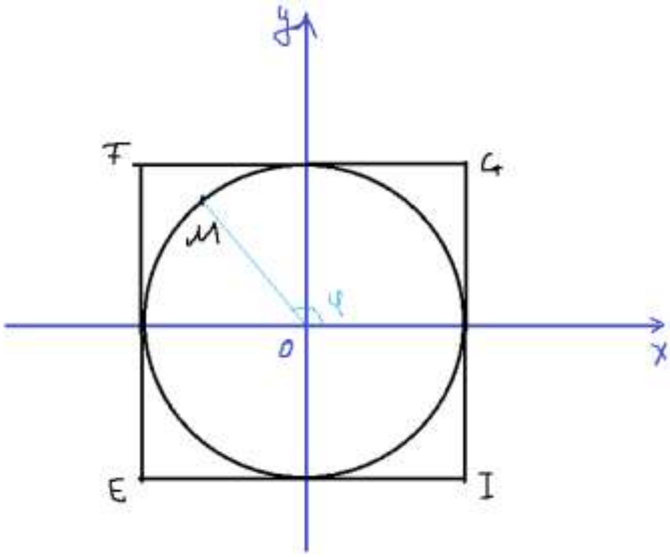
$$DM^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\cos\varphi\right)^2 + \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2} - 7\sin\varphi\right)^2 = 49\left(2 + \sqrt{2}(\sin\varphi - \cos\varphi)\right).$$

Таким образом,

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = 49 \cdot 8 = 392.$$

Рассмотрим теперь описанный квадрат и найдём $EM^2 + FM^2 + GM^2 + IM^2$.Сторона квадрата равна 14. Снова введём на плоскости систему координат с началом в центре окружности и с осями, параллельными сторонам квадрата. Тогда координаты вершин квадрата –

$$E(-7, -7), F(-7, 7), G(7, 7), I(7, -7).$$



Пусть φ – угол между вектором OM и осьюх.Тогда координаты точки М - $(7\cos\varphi, 7\sin\varphi)$.

$$EM^2 = (-7-7\cos\varphi)^2 + (-7-7\sin\varphi)^2 = 49\big(3+2(\cos\varphi+\sin\varphi)\big),$$
$$FM^2 = (-7-7\cos\varphi)^2 + (7-7\sin\varphi)^2 = 49\big(3+2(\cos\varphi-\sin\varphi)\big),$$
$$GM^2 = (7-7\cos\varphi)^2 + (7-7\sin\varphi)^2 = 49\big(3-2(\cos\varphi+\sin\varphi)\big),$$
$$IM^2 = (7-7\cos\varphi)^2 + (-7-7\sin\varphi)^2 = 49\big(3+2(-\cos\varphi+\sin\varphi)\big).$$

Таким образом,

$$EM^2 + FM^2 + GM^2 + IM^2 = 49 \cdot 12 = 588.$$
$$AM^2 - EM^2 + BM^2 - FM^2 + CM^2 - GM^2 + DM^2 - IM^2 = -49 \cdot 4 = -196.$$

Ответ: -196.