ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2024-2025 учебный год)

Задание 2

Задача 1

В группе детского сада 11 малышей, и их первый раз ведут в кукольный театр. Сколько существует способов построить детей парами (один ребенок идет за ручку с воспитателем), если порядок пар не важен? Предположим, в группе 6 мальчиков и 5 девочек, каждая пара малышей должна состоять из мальчика и девочки. Сколько существует способов в этом случае?

Решение.

1) Существует 11 способов выбрать ребенка, которые идёт с воспитателем. После этого есть C_{10}^2 способов выбрать первую пару, C_8^2 способов выбрать вторую пару и так далее. Всевозможных перестановок пар - 5!. Таким образом, способов построить детей парами –

$$11 \cdot \frac{10!}{2!\,8!}\frac{8!}{2!\,6!}\frac{6!}{2!\,4!}\frac{4!}{2!\,2!}\frac{1}{5!} = \frac{11!}{5!\,2^5} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10395.$$

2) Существует 6 способов выбрать мальчика, который идёт с воспитателем. Предположим после этого, что пять мальчиков построили в каком-либо порядке. Тогда есть 5 способов выбрать девочку в пару первому по порядку мальчику, 4 – второму и так далее, то есть любому разбиению на пары соответствует перестановка девочек. Таким образом, способов построить детей парами –

$$6 \cdot 5! = 6! = 720.$$

Ответ: 10395; 720.

Задача 2

Золушка нашла 13 одинаковых по виду орехов, среди которых, возможно, находится волшебный. Все обычные орехи имеют одинаковый вес, а волшебный немного от них по весу отличается. Может ли Золушка за три взвешивания на чашечных весах определить, есть ли волшебный орех, тяжелее он или легче остальных, если ей принесли ещё один орех, про который точно известно, что он обычный? Может ли она при этом найти волшебный орех, если он есть? Рассмотрите обобщение задачи на случай, когда имеется $(3^n - 1)/2$ «подозрительных» орехов (и один обычный для сравнения) и разрешается сделать n взвешиваний.

Решение.

Пусть $n = 1$. Тогда есть один «подозрительный» орех и один обычный. За одно взвешивание определяем, является ли «подозрительный» орех волшебным, и если да, легче он или тяжелее обычного.

Пусть $n = 2$. Тогда есть 4 «подозрительных» ореха (обозначим их 1, 2, 3, 4) и обычный орех, которому присвоим номер 5. Первое взвешивание – сравниваем орехи 1, 2 и 3, 5. Если весы в равновесии, то волшебным может быть только орех номер 4, за второе взвешивание всё про него определяем. Предположим, орехи 1, 2 весят больше, чем 3 и 5. Это означает, что либо волшебный орех имеет номер 1 или 2 и весит больше обычных,

либо волшебный орех – это орех 3 и весит меньше. Сравним по весу орехи 1 и 2. Если один из них тяжелее, то он волшебный, если вес равен, то орех 3 волшебный. Случай, когда орехи 1 и 2 весят меньше, чем 3 и 5, разбирается аналогично.
Пусть $n = 3$, то есть 13 «подозрительных» орехов и один обычный. «Подозрительные» орехи нумеруем числами с 1 по 13, обычный получает номер 14. Первое взвешивание – на одну чашку весов кладем орехи 1, 2, 3, 4, 5, на другую – 6, 7, 8, 9, 14. Если весы находятся в равновесии, волшебный орех может находиться среди четырех орехов 10, 11, 12, 13, а этот случай уже разобран. За два взвешивания находим волшебный орех, если он есть.
Предположим, первая чашка перевешивает. Положим на одну чашку весов орехи 1, 2, 6, на другую – орехи 3, 4, 7 (второе взвешивание). Если весы в равновесии, то волшебный орех – либо 5 (и он тяжелее), либо 8 или 9 (легче). Третьим взвешиванием сравниваем орехи 8 и 9. Если один из них легче, то он волшебные, в противном случае – волшебный орех номер 5. Предположим, орехи 1, 2, 6 весят больше, чем 3, 4, 7. Тогда волшебным является либо орех 1, либо 2, либо 7. Третьим взвешиванием сравниваем орехи 1 и 2. Если один из них тяжелее, то он волшебный, иначе – волшебным является орех 7.
В общем случае делим «подозрительные» орехи на 3 группы размером
$(3^{n-1} + 1)/2, (3^{n-1} - 1)/2, (3^{n-1} - 1)/2.$
(две одинаковые, в одной на 1 орех больше).
Первое взвешивание. На одну чашку весов положим первую группу орехов, а на вторую – вторую группу и обычный орех. Если весы уравновесились, то волшебный орех может быть только в третьей группе, и есть $n - 1$ взвешивание, чтобы его определить.
Второе взвешивание. Предположим, первая группа тяжелее. Разделим её на кучки размером
$(3^{n-2} + 1)/2, (3^{n-2} + 1)/2, (3^{n-2} - 1)/2.$
Вторую группу орехов разделим на кучки размером
$(3^{n-2} - 1)/2, (3^{n-2} - 1)/2, (3^{n-2} + 1)/2.$
Положим на одну чашу весов первую кучку из первой («тяжелой») группы и первую кучку из второй группы, на вторую чашу весов – вторую кучку из первой группы и вторую из второй. Если весы находятся в равновесии, то волшебный орех находится либо в третьей тяжелой кучке размером $(3^{n-2} - 1)/2$, либо в третьей «легкой кучке» размером $(3^{n-2} + 1)/2$. Если одна из чаш перевешивает, то мы получаем тяжелую кучку размером $(3^{n-2} + 1)/2$ и легкую кучку размером $(3^{n-2} - 1)/2$.
Повторяем алгоритм – делим каждую из двух кучек на три части, кладем на весы по одной части из каждой кучки. В результате придем к ситуации, разобранной в случае $n = 3$.

Задача 3

В одну вазочку насыпали арахис в шоколадной глазури, а в другую – в сахарной. Затем 40% конфет из первой вазочки переложили во вторую. После этого вынули 20% конфет из второй вазочки. Половину этих конфет составил арахис в шоколаде, его положили в первую вазочку, а остальные съели. Оказалось, что арахиса в шоколаде во второй вазочке на 16 штук меньше, чем в первой, а общее количество конфет во второй вазочке увеличилось по сравнению с первоначальным более, чем на 5%. Найдите изначальное количество конфет каждого вида при условии, что арахиса в сахаре было больше, чем в шоколаде, и без этого условия.

Решение.

Пусть в первой вазочке было x конфет, во второй – y. После первого перекладывания в первой вазочке осталось $0{,}6x$ конфет, во второй – $y+0{,}4x$ конфет.
Далее из второй вазочки вынули $0{,}1(y+0{,}4x)$ арахиса в шоколаде и столько же в сахаре.
Наконец, арахиса в шоколаде впервой вазочке стало $0{,}6x+0{,}1(y+0{,}4x)$ штук, а во второй - $0{,}4x-0{,}1(y+0{,}4x)$ штук.
Всего конфет во второй вазочке осталось $0{,}8(y+0{,}4x)$.
По условию,
$0{,}64x+0{,}1y=0{,}36x-0{,}1y+16$,
$0{,}8(y+0{,}4x)>1{,}05y$.
Таким образом,

$$7x+5y=400,$$
$$32x>25y.$$

Из уравнения следует, что x делится на 5.
Первый случай (при условии $y>x$).

$$x<y<\frac{32}{25}x,\ \ 12x<7x+5y<\frac{67}{5}x,$$
$$\frac{400\cdot 5}{67}<x<\frac{400}{12},\qquad 30\le x\le 33.$$

Так как x делится на 5, $x=30$, $y=38$.
Общий случай. Обозначим $0{,}1(y+0{,}4x)=k$, по условию задачи это целое число. Тогда $5y+2x=50k$, решая систему из двух уравнений, получаем

$$x=80-10k,\ \ y=14k-32.$$

Так как x и y натуральные, $3\le k\le 7$.
Подставим в неравенство:

$$32(80-10k)>25(14k-32),$$

$42\cdot 8>67k$, $k\le 5$.
При $k=3$ $x=50$, $y=10$;
при $k=4$ $x=40$, $y=24$;
при $k=5$ $x=30$, $y=38$.

Ответ: 50 и 10, 40 и 24, 30 и 38.

Задача 4

При каких a корни уравнения

$$\sqrt{x+4+2\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+12-6\sqrt{x+3}}=a$$

принадлежат промежутку $[1;13)$?

Решение.

Сделаем замену $t=\sqrt{x+3}$. Если $1\le x<13$, то $2\le t<4$. Теперь следует найти значения a, при которых корни уравнения

$$\sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^2+9-6t}=a$$

принадлежат промежутку $[2;4)$.

Получаем

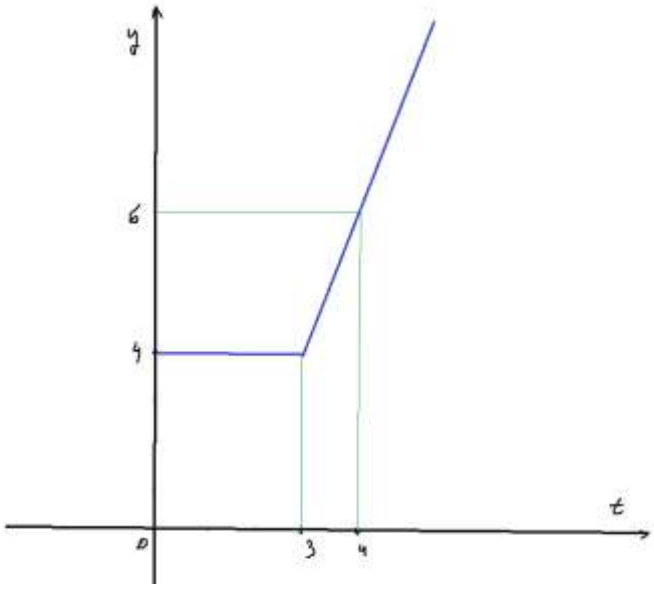
$$|t+1|+|t-3|=a,$$

если $t\le 3$, $t+1+3-t=a$, $4=a$;

если $t>3$, $t+1+t-3=a$, $2t-2=a$.

Таким образом, при $a=4$ корнями уравнения будут все числа из промежутка $[0,3]$, при $a>4$ уравнение имеет единственный корень $t=1+a/2$.

Решая неравенство $2\le 1+a/2<4$, получаем $4<a<6$.



Проиллюстрируем решение. Рассмотрим функцию $y=t+1+|t-3|$. Решения уравнения - это абсциссы точек пересечения графика функции с прямой $y=a$.

При $t=4$ $y=2t-2=6$. Поэтому для любых $4<a<6$ значение t попадает в промежуток $(3;4)$.

Ответ: $4<a<6$.

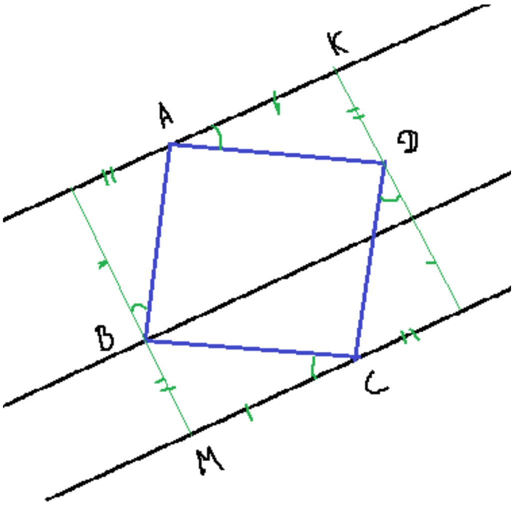
Задача 5

Найдите геометрическое место четвертых вершин квадратов, три вершины которых лежат на трех заданных параллельных прямых.

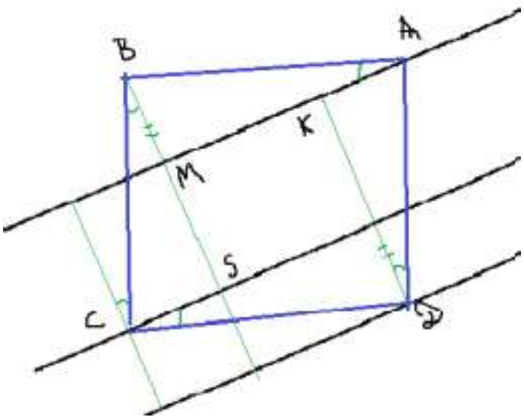
Решение.

Пусть расстояние от первой прямой до второй (средней) равно d_1, расстояние от второй до третьей равно d_2 и $d_1 \geq d_2$.

Возможны три случая расположения квадратов. В первом случае из равенства треугольников BCM и DAK получаем, что вершина D расположена на расстоянии d_2 от первой прямой и, следовательно, на расстоянии $d_1 - d_2$ от второй прямой.



Во втором случае из равенства треугольников CBS и ADK получаем, что вершина B расположена на расстоянии d_2 от первой прямой и на расстоянии $d_1 + d_2$ от второй прямой.



В третьем случае вершина B расположена на расстоянии d_1 от первой прямой и на расстоянии $d_1 + d_2$ от второй прямой.

Таким образом, геометрическим местом четвертых вершин являются три прямые, параллельные данным, две из них расположены на расстоянии $d_1 + d_2$ от средней прямой, третья проходит на расстоянии $d_1 - d_2$ от средней прямой и лежит между средней прямой и прямой, наиболее удаленной от неё.