ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2023-2024 учебный год)

Задание 3

Задача 1

Евгений решил с января по май прочитать 10 умных книг, прочитывая каждый месяц хотя бы одну книгу. Порядок, в каком он будет читать книги, Евгений уже придумал. Сколько у него есть способов распределить книги для чтения по месяцам?

Решение.
Представим, что книги поставили на полку в том порядке, в каком предполагается их читать. Чтобы распределить книги по месяцам, потребуется четыре разделителя. Мест, в которые можно поставить разделители – девять (между книгами). Таким образом, количество способов распределить книги для чтения по месяцам равно количеству способов выбрать четыре места для разделителей из девяти:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!\,5!} = 126.$$

Ответ: 126.

Задача 2

В партере Большого театра 11 рядов кресел по 30 мест в каждом. Во время премьерного спектакля свободных мест в зале нет. Для каждого из номеров от 1 до 30 выбирают самого старшего зрителя из сидящих на креслах с этим номером, а в каждом ряду с первого по одиннадцатый выбирают самого молодого зрителя. Кто старше – самый молодой из 30 старших или самый старший из 11 младших?

Решение.

Пусть А - самый молодой из 30 старших зрителей, его возраст равен x лет, а В - самый старший из 11 младших зрителей, и его возраст – y лет. Рассмотрим зрителя С, сидящего в том же ряду, что и В, в кресле с тем же номером, что и А. Пусть возраст этого зрителя равен z. С одной стороны, $z \geq y$, а с другой - $z \leq x$. Таким образом, $y \leq x$.

Ответ: самый молодой из 30 старших зрителей старше, чем самый старший из 11 младших зрителей.

Задача 3

Некоторую сумму денег разделили в отношении 2:5, меньшую сумму положили в начале года на счет в один банк, а оставшуюся часть – в другой банк. К концу года сумма вкладов стала равна 3980 тысяч рублей, а через два года – 4525,9 тысяч рублей. Если бы изначально меньшую сумму положили на счет во второй банк, а большую – в первый, то через год сумма денег на счетах равнялась бы 3965 тысяч рублей. Определите, какую сумму на счетах можно было бы получить через два года, если все деньги изначально положить в один банк.

Решение.

Пусть изначальное количество денег равно $7S$, за год вклад в первом банке увеличивается в x раз, во втором - в y раз.

К концу первого года сумма вкладов равна $2Sx + 5Sy$, к концу второго - $2Sx^2 + 5Sy^2$.

Если бы изначально меньшую сумму положили на счет во второй банк, а большую – в первый, то через год сумма денег на счетах равнялась бы $5Sx + 2Sy$. Получаем систему

$$2Sx + 5Sy = 3980$$
$$2Sx^2 + 5Sy^2 = 4525{,}9$$
$$5Sx + 2Sy = 3965.$$

Из первого и третьего уравнений находим

$$Sy = Sx + 5, Sx = 565, Sy = 570.$$

Подставляя во второе уравнение, находим

$$1130x + 2850y = 4525{,}9.$$

С другой стороны,

$$S(1130x + 2850y) = 1130 \cdot 565 + 2850 \cdot 570 = 2262950.$$

Таким образом,

$$S = \frac{2262950}{4525{,}9} = 500,$$

$$x = \frac{565}{500} = 1{,}13, y = \frac{570}{500} = 1{,}14.$$

Если бы все деньги положили на счет в первый банк, то через два года получили бы сумму $7Sx^2 = 4469{,}15$ (тысяч рублей), а если бы все деньги положили во второй банк - $7Sy^2 = 4548{,}6$ (тысяч рублей).

Ответ: 4469150 рублей и 4548600 рублей.

Задача 4

Найти все целочисленные пары, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3x + y - 5} + 2\sqrt{y - 2x + 5} = \sqrt{15 - 6y - 3x}.$$

Решение.

__**Первый способ**__. Обозначим $3x + y - 5 = a^2$, $y - 2x + 5 = b^2$. Тогда

$$x = \frac{a^2 - b^2}{5} + 2, \qquad y = \frac{2a^2 + 3b^2}{5} - 1, \qquad 15 - 6y - 3x = 15 - 3a^2 - 3b^2,$$

$$a + 2b = \sqrt{15 - 3a^2 - 3b^2}.$$

Возводя в квадрат, получаем

$$4a^2 + 7b^2 + 4ab = 15.$$

Числа a^2 и b^2 – целые и неотрицательные, числа a и b неотрицательные.

b^2 может принимать значения 0, 1, 2.

Если $b^2 = 0$, то $a^2 = 15/4$ – не целое.

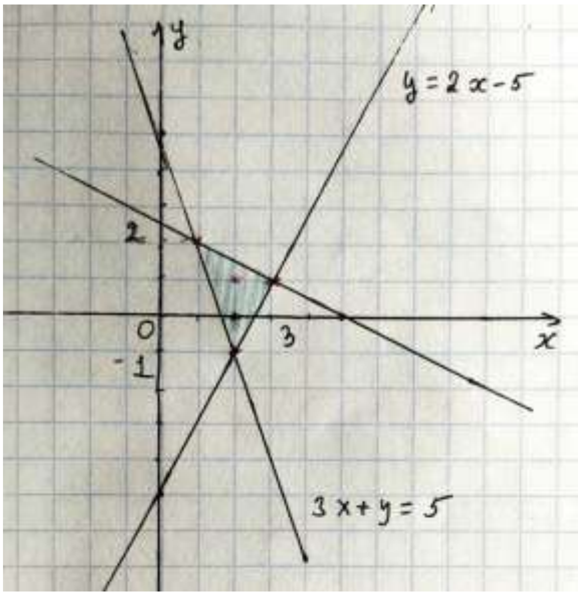
Если $b^2 = 1$, то $4a^2 + 4a = 8$, $a = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

Если $b^2 = 2$, то $4a^2 + 8a = 1$, решений таких, что a^2 – целое, не существует.

Второй способ. Построим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 3x + y - 5 \geq 0 \\ y - 2x + 5 \geq 0 \\ 15 - 6y - 3x \geq 0 \end{cases}.$$

Целочисленные точки, принадлежащие этому множеству, – $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,0)$, $(2,-1)$, $(3,1)$. Уравнению удовлетворяет только пара $(2,0)$.



Ответ: $x = 2$, $y = 0$.

Задача 5

Числа x и y таковы, что

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13} = \sqrt{10}.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^2 + y^2$?

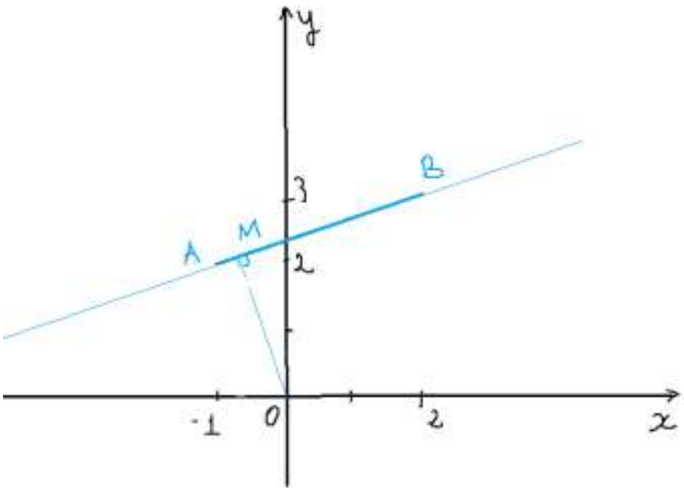
Решение.

Выделяя полные квадраты, находим

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{10}$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(-1,2)$, $B(2,3)$ и $M(x,y)$. Тогда полученное равенство означает, что $|AM| + |BM| = \sqrt{10}$, причем $|AB| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Это возможно, только если точка M лежит на отрезке AB.



Координаты точки M удовлетворяют равенствам

$$x = -1 \cdot (1 - \lambda) + 2\lambda = 3\lambda - 1,\ y = 2(1 - \lambda) + 3\lambda = \lambda + 2,$$

где $0 \le \lambda \le 1$ (при $\lambda = 0$ точка M совпадает с точкой A, при $\lambda = 1$ – с точкой B).
Эти соотношения вытекают, например, из равенств

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Тогда $x^2 + y^2 = (3\lambda - 1)^2 + (\lambda + 2)^2 = 10\lambda^2 - 2\lambda + 5$.
Наименьшее значение функция $f(\lambda) = 10\lambda^2 - 2\lambda + 5$ принимает при $\lambda = 0{,}1$ (абсцисса вершины параболы $y = 10\lambda^2 - 2\lambda + 5$), это значение равно 4,9.
Можно заметить, что $x^2 + y^2 = |OM|^2$ – квадрат расстояния от начала координат до точки M. Наименьшее расстояние от начала координат до точек прямой, проходящей через A и B – длина перпендикуляра, опущенного на эту прямую. Если бы при решении задачи получилось значение $\lambda < 0$, это бы означало, что основание перпендикуляра лежит левее точки A и точка A – ближайшая к началу координат точка отрезка AB. Аналогично, если бы получили $\lambda > 1$, ближайшей к началу координат точкой отрезка была бы точка B.

Ответ: 4,9.