ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2023-2024 учебный год)

Задание 4

Задача 1

Из вазочки, в которой лежало 13 карамелек в красных фантиках и 27 – в зеленых, вынули 5 конфет. С какой вероятностью среди этих конфет окажется хотя бы одна в красном фантике и хотя бы одна в зеленом?

Решение.

Найдём сначала вероятность того, что все пять конфет – в фантиках одного цвета. Способов выбрать пять конфет из 40 –

$$C_{40}^{5}=\frac{40!}{35!\,5!}$$

Способов выбрать пять конфет из 13 (красные фантики)

$$C_{13}^{5}=\frac{13!}{8!\,5!}.$$

Способов выбрать пять конфет из 27 (зеленые фантики)

$$C_{27}^{5}=\frac{27!}{22!\,5!}$$

Вероятность того, что фантики одного цвета –

$$\frac{13!\,35!}{8!\,40!}+\frac{27!\,35!}{22!\,40!}=\frac{9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13+23\cdot24\cdot25\cdot26\cdot27}{36\cdot37\cdot38\cdot39\cdot40}=\frac{11+23\cdot6\cdot5}{37\cdot38\cdot4}=\frac{701}{5624}.$$

Искомая вероятность -

$$1-\frac{701}{5624}=\frac{4923}{5624}\approx 0{,}875.$$

Ответ: 0,875.

Задача 2

Какое наименьшее количество цифр нужно приписать к числу 2024, справа, слева, или справа и слева, чтобы получившееся число делилось на все числа от 2 до 9?

Решение.

Чтобы выполнялось условие задачи, число должно делиться на 9, 8, 7 и 5. Так как искомое число четное и делится на 5, последней цифрой должен быть ноль.

Выясним, достаточно ли приписать две цифры. Сумма цифр полученного числа 2024*0 или *20240 должна делиться на 9, поэтому вместо звездочки должна быть цифра 1. Но число 202410 не делится на 8, а число 120240 не делится на 7.

Три цифры приписать можно. Возможные варианты получившихся чисел: 1920240, 8220240, 2202480.

Ответ: 3.

Задача 3

Найдите целые числа a, b, c, d, образующие геометрическую прогрессию, знаменатель которой - целое число из интервала $(-10,4)$, если
$$2d = 4a^3 + 2b^2 + c.$$

Решение.

Пусть q – знаменатель прогрессии. Тогда числа можно записать в виде
$$b = qa, c = q^2a, d = q^3a.$$
Подставляя в равенство, получаем
$$2q^3a = 4a^3 + 2q^2a^2 + q^2a,$$
$$4a^2 + 2q^2a + q^2 - 2q^3 = 0. \qquad (*)$$
Полученное равенство рассмотрим как квадратное уравнение относительно a. Оно имеет решения, если
$$q^4 + 8q^3 - 4q^2 \geq 0,$$
То есть
$$q^2 + 8q - 4 \geq 0.$$
Таким образом,
$$q \leq -4 - 2\sqrt{5} \text{ или } q \geq -4 + 2\sqrt{5}.$$
Так как $4 < 2\sqrt{5} < 5$, q может принимать значения -9, 1, 2, 3. Кроме того, из (*) следует, что q – четное число, поэтому $q = 2$,
$$a^2 + 2a - 3 = 0,$$
$$a = 1 \text{ или } a = -3,$$
искомые числа 1, 2, 4, 8 или -3, -6, -12, -24.

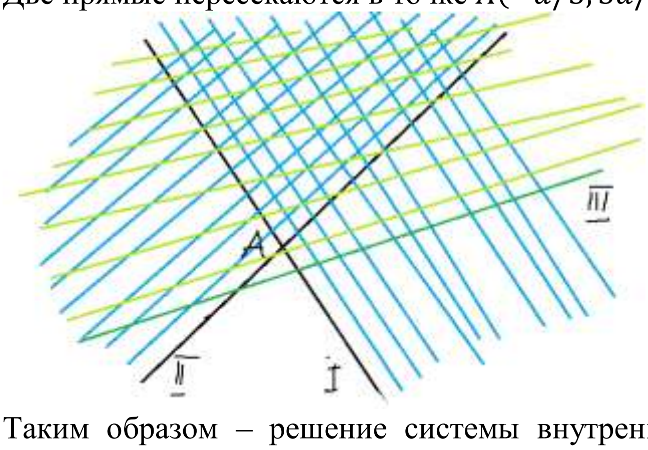
Ответ: 1, 2, 4, 8 или -3, -6, -12, -24.

Задача 4

Найти все значения a, при каждом из которых решение (x, y) системы
$$\begin{cases} y + 2x \geq a, \\ y - x \geq 2a \end{cases}$$
удовлетворяет неравенству $2y - x > a + 3$.

Решение.

Решением неравенства $y + 2x \geq a$ на плоскости x0y является полуплоскость выше прямой $y + 2x = a$ (I) и сама эта прямая, решением неравенства $y - x \geq 2a$ – полуплоскость, расположенная выше прямой $y - x = 2a$ (II) и сама эта прямая.
Две прямые пересекаются в точке $A(-a/3, 5a/3)$.



Таким образом – решение системы внутренняя часть и стороны угла, левая сторона которого образована прямой I, а правая – прямой II.

Решением неравенства $2y - x > a + 3$ на плоскости x0y является полуплоскость выше прямой $2y - x = a + 3$ (III).
Так как угловой коэффициент прямой III меньше углового коэффициента прямой II, условие задачи выполнено тогда и только тогда, если точка A лежит выше прямой III, то есть неравенство $2y - x > a + 3$ справедливо при $x = -a/3$, $y = 5a/3$.
Получаем

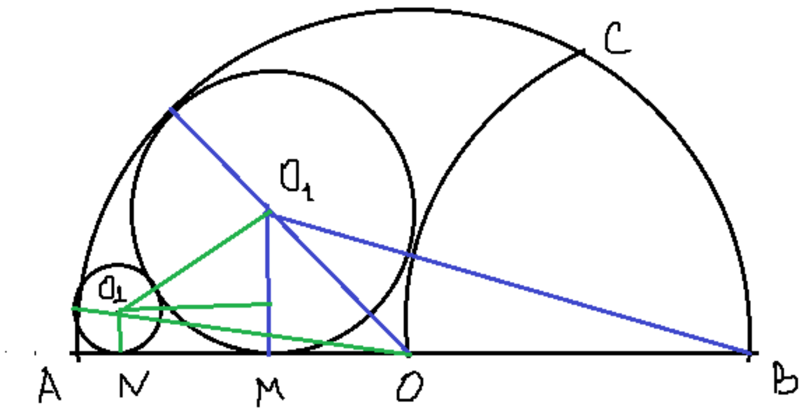
$$2 \cdot \frac{5a}{3} + \frac{a}{3} > a + 3, a > \frac{9}{8}.$$

Ответ: $a > 9/8$.

Задача 5

На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность с центром O. Из точки B, как из центра, проведена дуга OC (C – точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Найдите отношение радиусов двух окружностей, одна из которых касается дуги AC, дуги OC и прямой OA, а вторая касается дуги AC, прямой OA и первой окружности.

Решение.
Пусть O_1 – центр первой окружности, M – точка касания первой окружности с прямой OA. Обозначим через R радиус полукруга, через r_1 радиус первой окружности, положим $OM = x$.
Тогда
$MO_1 = r_1, OO_1 = R - r_1,\ BM = R + x, BO_1 = R + r_1.$



По теореме Пифагора для треугольников O_1MB и O_1M0 получаем

$$(R + r_1)^2 = r_1^2 + (x + R)^2, (R - r_1)^2 = r_1^2 + x^2,$$

или

$$x^2 + 2Rx - 2Rr_1 = 0,$$
$$x^2 + 2Rr_1 - R^2 = 0.$$

Складывая равенства, получаем

$$2x^2 + 2Rx - R^2 = 0,$$
$$x = \frac{(\sqrt{3} - 1)R}{2}.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$4Rr_1 - R^2 = 2Rx = (\sqrt{3} - 1)R^2,$$
$$r_1 = \frac{\sqrt{3}R}{4}.$$

Пусть вторая окружность касается прямой OA в точке N, O_2 – центр второй окружности, r_2 – её радиус, $ON = y$.
Тогда $O_1O_2 = r_1 + r_2, OO_2 = R - r_2$ и по теореме Пифагора для треугольников с гипотенузами O_1O_2 и OO_2 получаем

$(r_1+r_2)^2=(r_1-r_2)^2+(y-x)^2$, $(R-r_2)^2=y^2+r_2^2$
или

$$y^2-\left(\sqrt{3}-1\right)Ry+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2R^2}{4}-\sqrt{3}Rr_2=0,$$
$$y^2+2Rr_2-R^2=0.$$

Умножая первое равенство на 2, второе – на $\sqrt{3}$ и складывая, получим

$$\left(2+\sqrt{3}\right)y^2-2\left(\sqrt{3}-1\right)Ry-2\left(\sqrt{3}-1\right)R^2=0,$$
$$y=\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{6}}{2+\sqrt{3}}R.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$\left(2+\sqrt{3}\right)Rr_2+\left(\sqrt{3}-1\right)Ry-R^2-\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{R^2}{2}=0,$$
$$2\left(2+\sqrt{3}\right)r_2=\left(4-\sqrt{3}\right)R-2\left(\sqrt{3}-1\right)y=$$
$$=\left(4-\sqrt{3}-2\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{6}\right)}{2+\sqrt{3}}\right)R,$$
$$r_2=\frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}+2\sqrt{6}-3}{2\left(2+\sqrt{3}\right)^2}R.$$

Таким образом,

$$\frac{r_2}{r_1}=2\frac{\left(6\sqrt{3}-6\sqrt{2}+2\sqrt{6}-3\right)\sqrt{3}}{3\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2\frac{\left(6-\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$$

Ответ:

$$\frac{2\left(6+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)}{7+4\sqrt{3}}.$$