ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2023-2024 учебный год)

Задание 5
Задача 1

В вазочке лежат 30 конфет, которые выглядят одинаково, но имеют десять различных начинок (по три конфеты с каждой начинкой). Найдите вероятность обнаружить среди шести выбранных случайным образом конфет три конфеты с одним вкусом.

Решение

Количество вариантов выбрать 6 конфет из 30 равно C_{30}^6.

Пусть три конфеты из шести имеют одинаковый вкус. Имеется 10 вариантов выбрать такую тройку.

Вариантов выбрать оставшиеся три конфеты - C_{27}^3.

При подсчете вариантов каждый случай, когда выбрали две тройки конфет с одинаковым вкусом, учитывается два раза. Количество таких исходов равно $C_{10}^2 = 45$. Поэтому количество благоприятствующих исходов равно

$$10 \cdot C_{27}^3 - 45.$$

Искомая вероятность равна

$$\frac{10 \cdot C_{27}^3 - 45}{C_{30}^6} = \frac{649}{13195} \approx 0{,}05.$$

Ответ: примерно 0,05.

Задача 2

При всех значениях параметра a решите уравнение

$$\sqrt{x+a} = x^2 - a.$$

Решение

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + a = (x^2 - a)^2 \\ x^2 - a \geq 0. \end{cases}$$

Получаем,

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - x - a = 0.$$

Решим это уравнение относительно a:

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}, \qquad a_1 = x^2 - x, \qquad a_2 = x^2 + x + 1.$$

В первом случае $x^2 - x - a = 0$, при $a < -1/4$ корней нет, при $a = -1/4$ $x = 1/2$, при $a > -1/4$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

$x^2 - a = x$, $x_1 \geq 0$, если $a \leq 0$, $x_2 \geq 0$ для всех допустимых a .

Во втором случае $x^2 + x + 1 - a = 0$, $D = -3 + 4a$, при $a < 3/4$ корней нет, при $a = 3/4$ $x = -1/2$, при $a > 3/4$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3 + 4a}}{2}, \qquad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{-3 + 4a}}{2}.$$

$x^2 - a = -x - 1$, $x_3 + 1 \leq 0$, если $a \geq 1$, $x_4 + 1 \geq 0$ для всех допустимых a.

Ответ: при $a < -0{,}25$ корней нет; при $a = -0{,}25$ $x = 0{,}5$;
при $-0{,}25 < a \leq 0$ корни x_1 и x_2; при $0 < a < 1$ один корень x_2;
при $a \geq 1$ корни x_2 и x_3.

Задача 3

Из некоторого пункта A в одном направлении выехали в течение часа два автобуса. В тот момент, когда второй автобус проехал 11 км, первый проехал 15/16 от расстояния, которое проедет второй автобус тогда, когда расстояние, пройденное первым автобусом, составит 9/16 от расстояния, на котором находился бы второй автобус от пункта A, если бы он проехал вдвое большее расстояние, чем проедет первый автобус в тот момент, когда он будет в два раза дальше от A, чем второй автобус.
Предполагая, что оба автобуса едут с одинаковой постоянной скоростью, найдите, какое расстояние проехал первый автобус в момент, когда второй автобус выехал из пункта A.

Решение

Пусть в тот момент, когда первый автобус будет в два раза дальше от A, чем второй автобус, второй автобус проехал x км. Тогда первый автобус проедет в этот момент $2x$ км. Вдвое большее расстояние равно $4x$ км, 9/16 от этого расстояния составит $9x/4$ км.
Так как автобусы двигаются в одном направлении с одинаковой скоростью, расстояние между ними постоянное и составляет x км. Значит, когда первый автобус проедет $9x/4$ км, второй проедет $5x/4$ км. Следовательно, в тот момент, когда второй автобус проехал 11 км, первый проехал $(15/16)(5x/4\ ) = 75x/64$ км.
Справедливо равенство

$$\frac{75x}{64} = 11 + x, \qquad x = 64.$$

Ответ: 64 км.

Задача 4

Найдите все значения a, при каждом из которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a \\ ay - x = a - 2a^2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0 \end{cases}.$$

Решение

Рассмотрим первую систему. Складывая уравнения, получаем

$$(a + 2)y = 2 - 2a^2,$$

при $a = -2$ система не имеет решений,
при $a \neq -2$ система имеет единственное решение

$$x = \frac{3a^2}{a+2}, \qquad y = \frac{2(1 - a^2)}{a + 2}.$$

Рассмотрим вторую систему.
При $a = -2$ получаем

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases}$$

Выделяя во втором уравнении полный квадрат, запишем уравнение в виде
$2(x - 11/4)^2 + y^2 + 71/8 = 0.$
Так как выражение в левой части равенства всегда положительно, вторая система решений не имеет и, следовательно, системы равносильны.
Найдём, при каких $a \neq -2$ вторая система имеет единственное решение и это решение совпадает с решением первой системы. Если пара (x, y) - решение системы, то пара $(x, -y)$ - также решение этой системы. Следовательно, единственное решение может

быть только при $y = 0$. Из решения первой системы получаем, что $y = 0$, если $a = 1$ (и тогда $x = 1$) и если $a = -1$ (тогда $x = 3$)

При $a = 1$ получаем

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = y^4 \\ 2(x^2 - 4x + 3) + y^2 = 0 \end{cases},$$

$2y^4 + y^2 = 0$, $y = 0$, $x = 1$ или $x = 3$, то есть вторая система имеет два решения.

При $a = -1$ получаем

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = y^4 \\ 2(x-3)^2 + y^2 = 0 \end{cases},$$

$y = 0$, $x = 3$ – единственное решение.

Ответ: $-2, -1$.

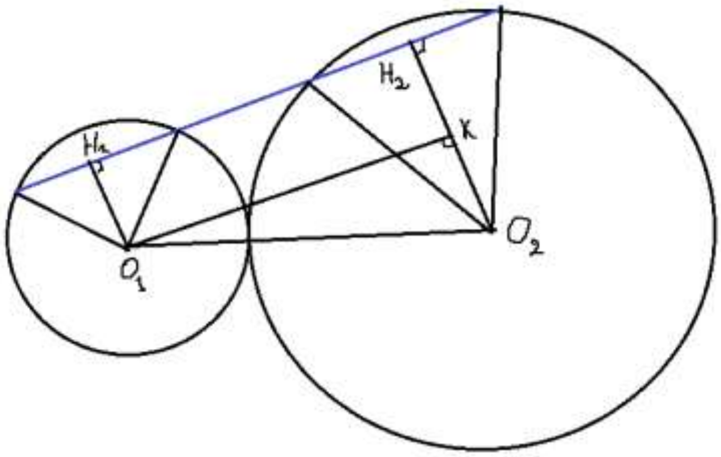
Задача 5

Найти секущую к двум касающимся окружностям с радиусами 1 и 2, если точками пересечения с окружностями она делится на равные части.

Решение

Пусть общая секущая делится на три равные части длиной x.

Предположим, окружности касаются внешним образом. Опустим из центров O_1 и O_2 окружностей перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 на секущую, пусть их длины равны h_1 и h_2. Соединим прямой центры окружностей (прямая O_1O_2 пройдёт через точку касания) и опустим перпендикуляр O_1K на прямую O_2H_2.



По теореме Пифагора для треугольников, образованных секущей и радиусами и для треугольника O_1O_2K,

$$h_1^2 = 1 - x^2/4,$$
$$h_2^2 = 4 - x^2/4,$$
$$4x^2 + (h_2 - h_1)^2 = 9.$$

Из первых двух равенств получаем

$$x^2 = 4 - 4h_1^2,$$
$$h_2^2 = h_1^2 + 3,$$

подставляя в третье равенство, получаем

$$7h_1^2 + h_1h_2 = 5.$$

Второе из полученных уравнений умножим на 5, третье – на 3 и вычтем из одного уравнения другое.

$$26h_1^2 + 3h_1h_2 - 5h_2^2 = 0,$$
$$h_2 = \frac{13}{5}h_1, \qquad \frac{144}{25}h_1^2 = 3, \qquad x^2 = 4\left(1 - \frac{75}{144}\right) = \frac{23}{12}.$$

Таким образом, длина секущей равна $3x = \sqrt{69}/2$.

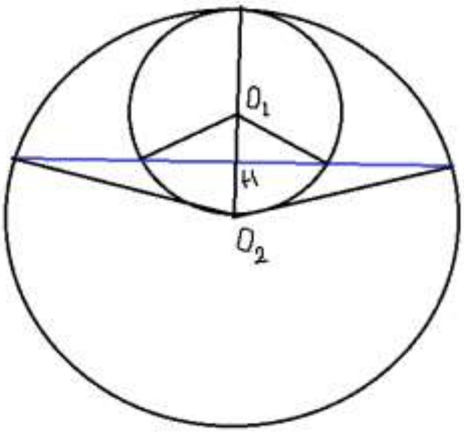
Предположим, окружности касаются внутренним образом. Опустим из центров O_1 и O_2 окружностей перпендикуляры на секущую, пусть их длины равны h_1 и h_2. Основания перпендикуляров совпадают с серединой секущей и, следовательно, секущая перпендикулярна прямой O_1O_2.

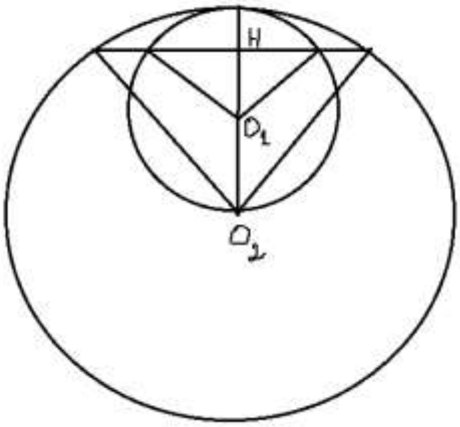
В зависимости от возможного расположения секущей, получаем две системы:

$$\begin{cases} h_1^2 = 1 - x^2/4 \\ h_2^2 = 4 - 9x^2/4, \\ h_1 + h_2 = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} h_1^2 = 1 - x^2/4 \\ h_2^2 = 4 - 9x^2/4, \\ h_2 = h_1 + 1 \end{cases}$$

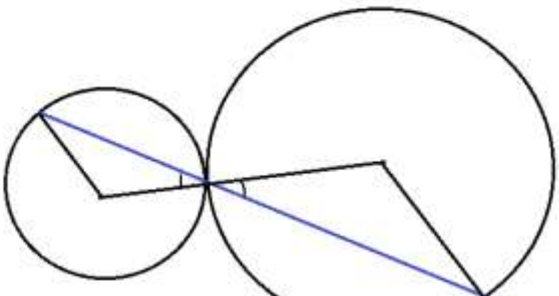


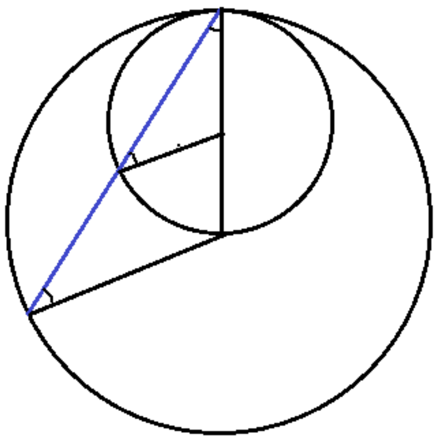


Решая первую систему, находим $h_1 = 3/4$, $h_2 = 1/4$, $x = \sqrt{7}/2$, то есть длина секущей равна $3\sqrt{7}/2$.

Вторая система имеет решение $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $x = 0$ (секущая вырождается в точку касания).

Пусть общая секущая делится на две части, тогда она должна проходить через точку касания.





Треугольники, образованные секущей и радиусами окружностей, подобны с коэффициентом подобия 2. Следовательно, любая секущая, проходящая через точку касания при внутреннем касании, удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: $\sqrt{69}/2$, $3\sqrt{7}/2$.