Задание № 3.

Задача 1

Маша и Паша, поссорившись, пошли в противоположные стороны с равными скоростями. Через три минуты Паша решил помириться и стал догонять Машу, увеличив скорость в три раза. Через какое время он догонит Машу, считая с того момента, как решил помириться?

Решение.

Пусть скорость Маши и Паши, с которой они пошли в разные стороны, равна x м/мин. Тогда за 3 минуты каждый из них прошел по $3x$ м, то есть, в тот момент, когда Паша решил помириться, расстояние между Пашей и Машей было равно $3x + 3x = 6x$ (м). Так как Паша, решив догнать Машу, увеличил скорость в три раза, то его скорость стала равна $3x$ м/мин, а скорость Маши осталась равной x м/мин. Тогда скорость сближения Паши и Маши равна $3x - x = 2x$ (м/мин). Значит, Паша догонит Машу через $\frac{6x}{2x} = 3$(мин).

Ответ. Через 3 минуты.

Задача 2

Найдите все трехзначные натуральные числа, у которых ровно 15 натуральных делителей.

Решение.

Количество натуральных делителей натурального числа, большего 1, легко найти, если представить это число в виде произведения простых множителей. Пусть $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$. Тогда количество натуральных делителей числа n равно $(p_1 + 1)\cdot(p_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(p_k + 1)$. Так как число 15 можно представить в виде произведения только двух множителей, больших 1: $15 = 3\cdot5$, то для искомого числа возможно два случая разложения на простые множители.

__**1 случай**__. $n = p^{14}$. Так как p – простое число, то $p \geq 2$, тогда $p^{14} \geq 2^{14} > 2^{10} = 1024$, то есть n не является трехзначным, что противоречит условию.

__**2 случай**__. $n = p_1^2 \cdot p_2^4$ где p_1 и p_2 – разные простые множители. Так как p_1 – простое число, то $p_1 \geq 2$, тогда если $p_2 \geq 5$, то $p_1^2 \cdot p_2^4 \geq 2^2\cdot5^4 = 4\cdot625 = 2500$, то есть n не является трехзначным, что противоречит условию. Тогда $p_2 = 2$ или $p_2 = 3$.

Если $p_2 = 2$, то $n = p_1^2 \cdot 2^4 = 16p_1^2$. Тогда при $p_1 \geq 11$ получим, что $16p_1^2 \geq 16 \cdot 11^2 = 16 \cdot 121 > 10 \cdot 100 = 1000$, то есть n не является трехзначным, что противоречит условию. Значит, $p_1 = 3$ или $p_1 = 5$ или $p_1 = 7$. При $p_1 = 3$ искомое число $n = 16 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$. При $p_1 = 5$ искомое число $n = 16 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$. При $p_1 = 7$ искомое число $n = 16 \cdot 7^2 = 16 \cdot 49 = 784$.

Если $p_2 = 3$, то $n = p_1^2 \cdot 3^4 = 81p_1^2$. Тогда при $p_1 \geq 5$ получим, что $81p_1^2 \geq 81 \cdot 5^2 = 81 \cdot 25 > 80 \cdot 20 = 1600$, то есть n не является трехзначным, что противоречит условию. Значит, $p_1 = 2$. При $p_1 = 2$ искомое число $n = 81 \cdot 2^2 = 81 \cdot 4 = 324$.

Ответ. 144, 324, 400, 784.

Задача 3

Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля в 30%?

Решение.

Пусть масса стали первого сорта с содержанием никеля в 5%, взятой для получения стали с содержанием никеля в 30%, равна x т. Тогда масса стали второго сорта с содержанием никеля в 40%, взятой для получения стали с содержанием никеля в 30%, будет равна $(140 - x)$ т. Масса никеля в стали первого сорта равна $0{,}05x$ т, а масса никеля в стали второго сорта равна $0{,}4(140 - x)$ т. Тогда масса никеля в новом сорте стали будет равна $(0{,}05x + 0{,}4(140 - x))$ т или $0{,}3 \cdot 140 = 42$ (т). Получили уравнение:

$$0{,}05x + 0{,}4(140 - x) = 42;$$
$$0{,}05x + 56 - 0{,}4x = 42;$$
$$0{,}4x - 0{,}05x = 56 - 42;$$
$$0{,}35x = 14;$$
$$x = 40.$$

Таким образом, для получения 140 т стали с содержанием никеля в 30% нужно взять 40 т стали с содержанием никеля в 5% и 140 – 40 = 100 (т) стали с содержанием никеля в 40%.

Ответ. 40 т стали с содержанием никеля в 5% и 100 т стали с содержанием никеля в 40%.

Задача 4

Существует ли натуральное число, которое уменьшается в 2025 раз при зачеркивании первых двух цифр его десятичной записи? (Ответ обосновать.)

Решение.

Пусть a – $(n+2)$-значное натуральное число, x – двузначное число, образованное первыми двумя цифрами числа a, y – натуральное число, которое получается из числа a зачеркиванием первых двух его цифр. Тогда $a = x\cdot 10^n + y$. Пусть число a уменьшается в 2025 раз при зачеркивании первых двух цифр его десятичной записи, то есть

$$x\cdot 10^n + y = 2025\cdot y;$$

$$x\cdot 10^n = 2024\cdot y.$$

Разложим 2024 на простые множители: $2024 = 2^3\cdot 11\cdot 23$. Так как в разложении правой части равенства $x\cdot 10^n = 2024\cdot y$ на простые множители присутствует простые числа 11 и 23, то, в силу основной теоремы арифметики, в разложении левой части этого равенства на простые множители тоже должны присутствовать простые множители 11 и 23. Так как $10 = 2\cdot 5$, то 10^n и $11\cdot 23$ являются взаимно простыми, значит, на $11\cdot 23 = 253$ должен делиться множитель x левой части равенства $x\cdot 10^n = 2024\cdot y$. Но по условию задачи x – двузначное число, образованное первыми двумя цифрами числа a, то есть $x \leq 99$, следовательно, x не делится нацело на 253. Получили противоречие. Значит, не существует натурального числа, которое уменьшается в 2025 раз при зачеркивании первых двух цифр его десятичной записи.

Ответ. Не существует.

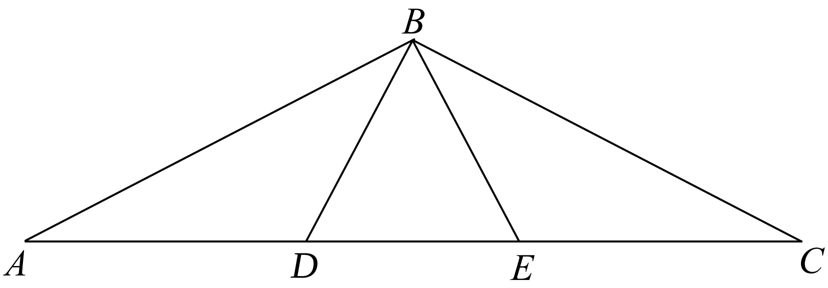
Задача 5

На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $BD = BE$ то треугольник ABC – равнобедренный.

Решение.

Возможно два случая расположения точек D и E на стороне AC.

<u>1 случай.</u> Точка D лежит между точками A и E.

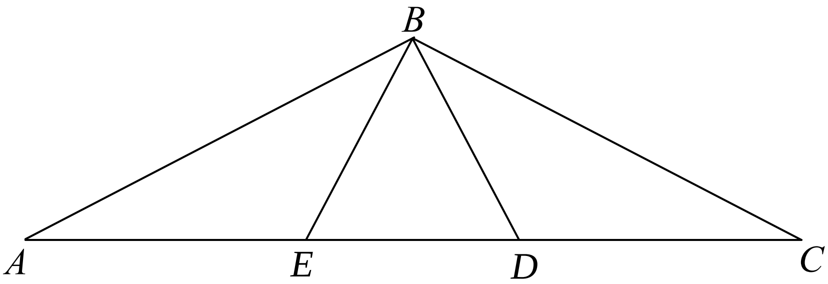


Так как $BD = BE$, то ΔDBE – равнобедренный с основанием DE по определению, следовательно, $\angle BDE = \angle BED$ как углы при основании равнобедренного треугольника по свойству.

Рассмотрим ΔABE и ΔCBD. $BD = BE$ по условию, $\angle BDC = \angle BEA$, так как $AD = CE$, то $AE = AD + DE = CE + DE = CD$. Значит, $\Delta ABE = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $AB = BC$.

Так как $AB = BC$, то ΔABC – равнобедренный по определению, **что и требовалось доказать.**

<u>2 случай</u>. Точка E лежит между точками A и D.



Так как $BD = BE$, то ΔDBE – равнобедренный с основанием DE по определению, следовательно, $\angle BDE = \angle BED$ как углы при основании равнобедренного треугольника по свойству.

Рассмотрим ΔABD и ΔCBE. $BD = BE$, $AD = CE$ по условию, $\angle BDA = \angle BEC$. Значит, $\Delta ABE = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $AB = BC$.

Так как $AB = BC$, то ΔABC – равнобедренный по определению, **что и требовалось доказать.**