Задание № 3.

Задача 1

Зная, что $x = 15^{2024} + 2$, установите, являются ли взаимно простыми числа $x^3 + 2$ и $x^2 + 1$.

Решение.

Обозначим, $a = 15^{2024}$, тогда $x^3 + 2 = (a + 2)^3 + 2 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + 2 =$ $= a(a^2 + 6a + 12) + 10$. Так как $a = 15^{2024}$, то a делится на 5 и 10 делится на 5, следовательно, $x^3 + 2$ делится на 5.

$x^2 + 1 = (a + 2)^2 + 1 = a^2 + 4a + 4 + 1 = a(a + 4) + 5$. Так как a делится на 5 и 5 делится на 5, то и $x^2 + 1$ делится на 5.

Таким образом, числа $x^3 + 2$ и $x^2 + 1$ при $x = 15^{2024} + 2$ имеют общий делитель, равный 5, следовательно, взаимно простыми не являются.

Ответ. Не являются.

Задача 2

При каких натуральных значениях n дробь $\dfrac{n^2+12n}{5n+98}$ является правильной и несократимой? Укажите все такие дроби.

Решение.

Так как n – число натуральное, то числитель и знаменатель дроби $\dfrac{n^2+12n}{5n+98}$ являются числами положительными, поэтому, для того, чтобы дробь $\dfrac{n^2+12n}{5n+98}$ была правильной, числитель должен быть меньше знаменателя, то есть

$$n^2 + 12n < 5n + 98;$$

$$n^2 + 7n - 98 < 0;$$

$$n^2 + 14n - 7n - 98 < 0;$$

$$n(n + 14) - 7(n + 14) < 0;$$

$$(n + 14)(n - 7) < 0.$$

Так как n – число натуральное, то $n + 14$ является числом положительным, следовательно, произведение $(n + 14)(n - 7)$ будет отрицательным тогда и только тогда, когда второй множитель $n - 7$ будет отрицательным. Условию $n - 7 < 0$ удовлетворяют натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Если n – число четное, то $n^2 + 12n$ и $5n + 98$ будут четными, следовательно, дробь $\dfrac{n^2+12n}{5n+98}$ является сократимой.

При $n = 1$ получаем дробь $\frac{n^2+12n}{5n+98} = \frac{1+12}{5+98} = \frac{13}{103}$, дробь $\frac{13}{103}$ несократима.

При $n = 3$ получаем дробь $\frac{n^2+12n}{5n+98} = \frac{9+36}{15+98} = \frac{45}{113}$, дробь $\frac{45}{113}$ несократима.

При $n = 5$ получаем дробь $\frac{n^2+12n}{5n+98} = \frac{25+60}{25+98} = \frac{85}{123}$, дробь $\frac{85}{123}$ несократима.

Ответ. При $n = 1$ дробь $\frac{13}{103}$ несократима, при $n = 3$ дробь $\frac{45}{113}$ несократима, при $n = 5$ дробь $\frac{85}{123}$ несократима.

Задача 3

Решите уравнение

$$(x^2-4)^3(3x^2-8x+4)^4 + (x^2-4)(3x^2+x-2)^6(3x^2-8x+4)^2 + \\ + (x^2-4)^5(3x^2+x-2)^2 = 0.$$

Решение.

Вынесем в левой части уравнения общий множитель $(x^2 - 4)$ за скобку, получим

$$(x^2-4)\cdot((x^2-4)^2(3x^2-8x+4)^4 + (3x^2+x-2)^6(3x^2-8x+4)^2 + \\ + (x^2-4)^4(3x^2+x-2)^2) = 0.$$

Произведение равно нули тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные существуют. Так как оба множителя в левой части уравнения существуют при любых значениях x, то уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$x^2 - 4 = 0$$

или

$$(x^2-4)^2(3x^2-8x+4)^4 + (3x^2+x-2)^6(3x^2-8x+4)^2 + (x^2-4)^4(3x^2+x-2)^2) = 0.$$

Корнями уравнения $x^2 - 4 = 0$ являются $x = \pm 2$.

Решим второе уравнение

$$(x^2-4)^2(3x^2-8x+4)^4 + (3x^2+x-2)^6(3x^2-8x+4)^2 + (x^2-4)^4(3x^2+x-2)^2) = 0.$$

Так как четная степень выражения может принимать только неотрицательные значения, то в левой части уравнения стоит сумма трех неотрицательных слагаемых. Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю, а натуральная степень выражения равна нулю тогда и только тогда, когда само это выражение равно нулю, следовательно, уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}(x^2-4)\cdot(3x^2-8x+4)=0,\\(3x^2+x-2)\cdot(3x^2-8x+4)=0,\\(x^2-4)\cdot(3x^2+x-2)=0.\end{cases}$$

Решим каждое уравнение системы.

1) $(x^2 - 4)\cdot(3x^2 - 8x + 4) = 0$;

$x^2 - 4 = 0$ или $3x^2 - 8x + 4 = 0$.

$x = \pm 2$. $\quad 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 0$;

$3x(x - 2) - 2(x - 2) = 0$;

$(x - 2)\cdot(3x - 2) = 0$;

$x = 2$ или $x = \frac{2}{3}$.

2) $(3x^2 + x - 2)\cdot(3x^2 - 8x + 4) = 0$;

$3x^2 + x - 2= 0$ или $3x^2 - 8x + 4 = 0$.

$3x^2 + 3x - 2x - 2 = 0$ $\quad x = 2$ или $x = \frac{2}{3}$.

$3x(x + 1) - 2(x + 1) = 0$;

$(x + 1)\cdot(3x - 2) = 0$;

$x = -1$ или $x = \frac{2}{3}$.

3) $(x^2 - 4)\cdot(3x^2 + x - 2) = 0$;

$x^2 - 4 = 0$ или $3x^2 + x - 2 = 0$.

$x = \pm 2$. $\quad x = -1$ или $x = \frac{2}{3}$.

Таким образом, система примет вид

$$\begin{cases}x=-2,\ x=\frac{2}{3},\ x=2,\\x=-1,\ x=\frac{2}{3},\ x=2,\\x=-2,\ x=-1,\ x=\frac{2}{3},\ x=2.\end{cases}$$

Решением системы являются $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$.

Таким образом, корнями уравнения являются $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$.

Ответ. $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 2$.

Задача 4

Точка M – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, точка P делит сторону BC в отношении $1 : 4$. Отрезки BM и AP пересекаются в точке K. Найдите площадь пятиугольника $MKPCD$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.

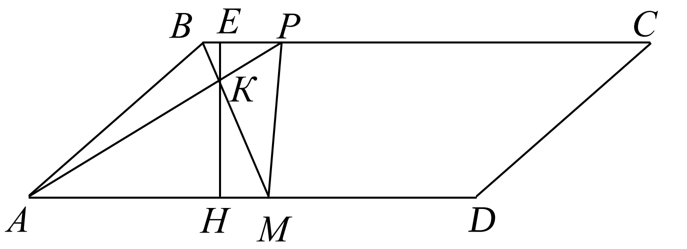
Решение.

Так как в условии задачи не указано, от какого конца отрезка BC считается отношение, в котором точка P делит отрезок BC, то возможно 2 случая:

1) $BP:PC = 1:4$;
2) $BP:PC = 4:1$.

Через точку K проведем высоту HE параллелограмма $ABCD$, $HE \perp AD$, $E \in BC$, $H \in AD$. Пятиугольник $MKPCD$ диагональю MP разделим на треугольник MKP и трапецию $MPCD$ с основаниями CP и MD. Тогда $S_{MKPCD} = S_{MKP} + S_{MPCD}$. Высота трапеции $MPCD$ равна высоте HE параллелограмма $ABCD$. $S_{ABCD} = AD \cdot HE = 40$.

<u>1 случай.</u> $BP:PC = 1:4$.



Так как $BP:PC = 1:4$ и M – середина AD, то $BP = 0{,}2BC$, $CP = 0{,}8BC$, $AM = MD = 0{,}5AD$.

Так как $BC = AD$ и $BC \parallel AD$ как противоположные стороны параллелограмма, то

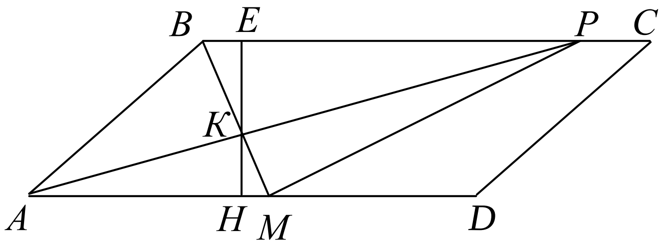
$S_{MPCD} = 0{,}5(CP + MD)\cdot HE = 0{,}5(0{,}8BC + 0{,}5AD)\cdot HE = 0{,}5\cdot 1{,}3AD\cdot HE = 0{,}65\cdot 40 = 26$.

Рассмотрим ΔBKP и ΔMKA. $\angle BKP = \angle MKA$ как вертикальные, $\angle KBP = \angle KMA$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BM. Значит, $\Delta BKP \sim \Delta MKA$ по двум углам, следовательно, $\dfrac{BK}{KM} = \dfrac{BP}{AM} = \dfrac{0{,}2BC}{0{,}5AD} = \dfrac{2}{5}$. Тогда $\dfrac{MK}{BM} = \dfrac{5}{7}$.

Треугольники MPK и MPB имеют общую высоту, проведенную из вершины P, следовательно, $\dfrac{S_{MPK}}{S_{BPM}} = \dfrac{MK}{BM} = \dfrac{5}{7}$, значит, $S_{MPK} = \dfrac{5}{7}\cdot S_{BPM} = \dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BP\cdot HE =$
$= \dfrac{5}{14}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot BC\cdot HE = \dfrac{40}{14} = \dfrac{20}{7} = 2\dfrac{6}{7}$.

Тогда $S_{MKPCD} = S_{MKP} + S_{MPCD} = 26 + 2\dfrac{6}{7} = 28\dfrac{6}{7}$.

<u>2 случай.</u> $BP:PC = 4:1$.



Так как $BP:PC = 4:1$ и M – середина AD, то $BP = 0{,}8BC$, $CP = 0{,}2BC$, $AM = MD = 0{,}5AD$.

Так как $BC = AD$ и $BC \parallel AD$ как противоположные стороны параллелограмма, то $S_{MPCD} = 0{,}5(CP + MD)\cdot HE = 0{,}5(0{,}2BC + 0{,}5AD)\cdot HE = 0{,}5\cdot 0{,}7AD\cdot HE = 0{,}35\cdot 40 = 14$.

Рассмотрим ΔBKP и ΔMKA. $\angle BKP = \angle MKA$ как вертикальные, $\angle KBP = \angle KMA$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BM. Значит, $\Delta BKP \sim \Delta MKA$ по двум углам, следовательно, $\dfrac{BK}{KM} = \dfrac{BP}{AM} = \dfrac{0{,}8BC}{0{,}5AD} = \dfrac{8}{5}$. Тогда $\dfrac{MK}{BM} = \dfrac{5}{13}$.

Треугольники MPK и MPB имеют общую высоту, проведенную из вершины P, следовательно, $\dfrac{S_{MPK}}{S_{BPM}} = \dfrac{MK}{BM} = \dfrac{5}{13}$, значит, $S_{MPK} = \dfrac{5}{13}\cdot S_{BPM} = \dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BP\cdot HE =$
$= \dfrac{5}{26}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot BC\cdot HE = \dfrac{2}{13}\cdot 40 = \dfrac{80}{13} = 6\dfrac{2}{13}$.

Тогда $S_{MKPCD} = S_{MKP} + S_{MPCD} = 14 + 6\dfrac{2}{13} = 20\dfrac{2}{13}$.

Ответ. $28\dfrac{6}{7}$ или $20\dfrac{2}{13}$.

Задача 5

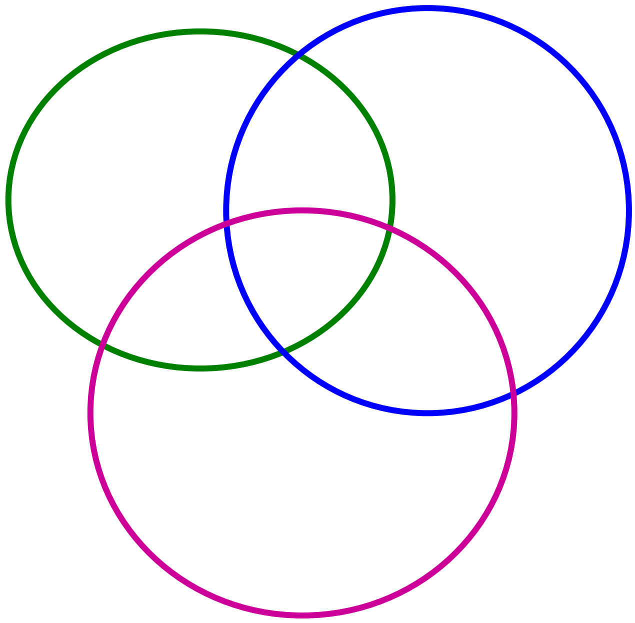
На занятия в школьную театральную студию записалось 100 человек, в студию танцев — 50 человек, в музыкально-хоровую студию — 48 человек. Когда каждого из учеников спросили, на занятия в какое количество студий он записался, ответ «по крайней мере в две» дали в два раза меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одну», а ответ «в три» — втрое меньше человек, чем ответ «не менее, чем в одну». Сколько всего учеников записалось на занятия в студии?

Решение.

В условии задачи есть некоторая неопределенность, так как не указано, были ли другие ответы на вопрос, кроме тех, которые указаны в условии задачи.

Будем решать задачу в предположении, что каждый из учеников отвечал один раз на вопрос: «На занятия в какое количество студий он записался» и дал один из трех ответов: «По крайней мере в две», «Не менее, чем в одну», «В три». При этом нужно учитывать, что ученики, записавшиеся в одну студию, могли дать только один ответ из предложенных: «Не менее, чем в одну»; ученики, записавшиеся в две студии, могли дать один из двух предложенных ответов: «По крайней мере в две», «Не менее, чем в одну»; а ученики, записавшиеся во все три студии, могли дать любой из предложенных трех ответов.

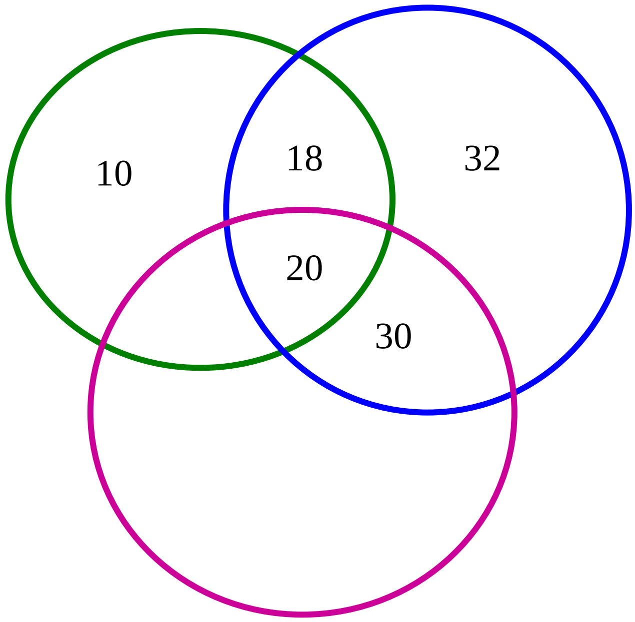
Для наглядности, воспользуемся кругами Эйлера. Пусть круг с синим контуром изображает учеников, записавшихся в театральную студию, круг с розовым контуром – учеников, записавшихся в студию танцев, круг с зеленым контуром – учеников, записавшихся в музыкально-хоровую студию.



Всего в спискам учеников, записавшихся в студии, $100 + 50 + 48 = 198$ человек, причем, учащиеся, записавшиеся в две студии учтены два раза, а учащиеся, записавшиеся в три студии учтены три раза.

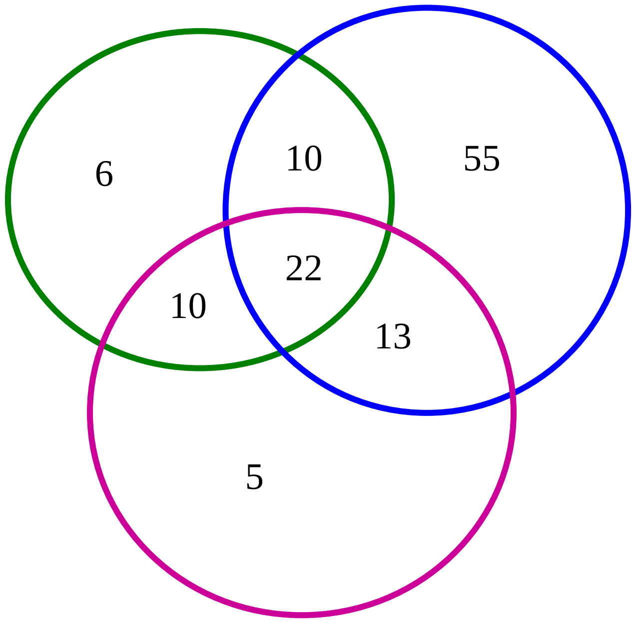
Пусть ответ «В три» дали $2x$ учеников, тогда ответ «Не менее, чем в одну» дали в три раза больше учеников, то есть $6x$ человек, а ответ «По крайней мере в две» дали в два раза меньше учеников чем ответ «Не менее, чем в одну», то есть ответ «По крайней мере в две» дали $3x$ учеников. Тогда всего в студии записалось $2x + 6x + 3x = 11x$ учеников.

В списочном составе учеников, записавшихся в студии, 198 человек, при этом ученики, давшие ответ «В три» учтены три раза, ученики, давшие ответ «По крайней мере в две» учтены не менее двух раз, а ученики, давшие ответ «Не менее, чем в одну», учтены не менее одного раза. Тогда $198 \geq 6x + 2\cdot 3x + 3\cdot 2x = 18x$, следовательно, $x \leq 11$. С другой стороны, количество учеников, записавшихся в студии, не менее, чем наибольшее число учеников, записавшихся в одну из студий, то есть $11x \geq 100$, а так как x – число натуральное, то $x \geq 10$. Таким образом, $10 \leq x \leq 11$, значит, $x = 10$ или $x = 11$.



Если $x = 10$, то $11x = 110$, то есть всего в студии записалось 110 человек. Покажем, что возможно выполнение условий задачи при условии, что всего в студии записалось 110 человек. В этом случае ответ «В три» дали $2x = 20$ учеников, ответ «Не менее, чем в одну» – $6x = 60$ учеников, ответ «По крайней мере в две» – $3x = 30$ учеников. Пусть только в театральную студию записалось 32 ученика, только в музыкально-хоровую студию записалось 10 учеников, в театральную студию и студию танцев записалось 30 учеников, в театральную студию и музыкально-хоровую студию записалось 18 учеников, во все три студии записалось 20 учеников. Все ученики, записавшиеся во все три студии дали ответ «В три» (20 человек), все ученики, записавшиеся в театральную студию и студию танцев дали ответ «По крайней мере в две» (30 человек), все остальные дали ответ «Не менее, чем в одну» ($10 + 18 + 32 = 60$ человек).

Если $x = 11$, то $11x = 121$, то есть всего в студии записалось 121 человек. Покажем, что возможно выполнение условий задачи при условии, что всего в студии записалось 121 человек. В этом случае ответ «В три» дали $2x = 22$ ученика, ответ «Не менее, чем в одну» – $6x = 66$ учеников, ответ «По крайней мере в две» – $3x = 33$ ученика. Пусть только в театральную студию записалось 55 учеников, только в музыкально-хоровую студию записалось 6 учеников, только в студию танцев 5 учеников, в театральную студию и студию танцев записалось 13 учеников, в театральную студию и музыкально-хоровую студию записалось 10 учеников, в музыкально-хоровую студию и студию танцев – 10 учеников, во все три студии записалось 22 ученика. Все ученики, записавшиеся во все три студии дали ответ «В три» (22 человека), все ученики, записавшиеся в две студии, дали ответ «По крайней мере в две» ($10 + 10 + 13 = 33$ человека), все ученики, записавшиеся в одну студию, дали ответ «Не менее, чем в одну» ($6 + 5 + 55 = 66$ человек).



Таким образом, всего на занятия в студии записалось 110 человек или 121 человек.

Ответ. 110 или 121.