РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 3 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2024-2025 учебный год)

Задача 1

Для вспашки трех одинаковых полей выделили два трактора, старый и новый. Старый трактор должен вспахать одно поле, новый – два. Вспахав четверть поля, старый трактор заглох и возобновил работу только тогда, когда новый трактор вспахал половину своего первого поля. Какой трактор быстрее выполнил задание?

Решение.

Пусть v(полей в час) – скорость старого трактора,u(полей в час) – скорость нового трактора. По условию задачи, старый трактор вспахал четверть поля быстрее, чем новый – половину поля, то есть

$$\frac{1}{4v} < \frac{1}{2u}, \qquad u < 2v.$$

Когда старый трактор возобновил работу, ему осталось вскопать 3/4поля, а новому - $1/2 + 1 = 3/2$ поля, то есть в два раза больше. Так как скорость нового трактора менее чем в два раза превосходит скорость старого, старый трактор закончит работу быстрее:

$$\frac{3}{4v} < \frac{3}{2u}.$$

Ответ: старый.

Задача 2

Сколько существует способов разместить 8 студентов в общежитии, если есть одна свободная трехместная комната, две двухместные и ещё в двух комнатах есть по одному свободному месту?

Решение.

Способ 1. Так как студентов 8, а мест – 9, одно место останется свободным. Количество вариантов размещения, при котором останется свободным одно из одиночных мест, равно

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot 2 = \frac{8!}{3!\,5!}\frac{5!}{2!\,3!}\frac{3!}{2!\,1!}2 = \frac{8!}{3!\,2!}.$$

Количество вариантов, при которых в одну из двухместных комнат заселится один студент, равно

$$C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 2 = \frac{8!}{3!\,5!}\frac{5!}{2!\,3!}\frac{3!}{1!\,2!}2 \cdot 2 = \frac{8!}{3!}.$$

Наконец, количество вариантов, при которых в трехместной комнате будут жить два студента, равно

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = \frac{8!}{2!\,6!}\frac{6!}{2!\,4!}\frac{4!}{2!\,2!}2 = \frac{8!}{8} = 7!.$$

Таким образом, общее количество способов разместить студентов равно

$$\frac{8!}{3!\,2!} + \frac{8!}{3!} + 7! = \frac{8!}{2!\,2!} + 7! = 7! \cdot 3 = 15120.$$

Способ 2. Добавим девятого, «фиктивного», студента, который будет занимать оставшееся свободным место. Тогда количество вариантов размещения равно

$$C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = \frac{9!}{3!\,6!}\frac{6!}{2!\,4!}\frac{4!}{2!\,2!}2 = \frac{9!}{3!\,2!\,2!} = 15120.$$

Ответ: 15120.

Задача 3

Фирма планирует получить кредит на год для финансирования двух проектов, первый из которых может принести прибыль в размере от 38% до 44% годовых, а второй – от 20% до 23% годовых. Планируется две трети суммы направить на реализацию первого проекта и треть – на реализацию второго. Какими должны быть наименьшая и наибольшая процентные ставки кредитования, чтобы фирма гарантированно обеспечила себе чистую прибыль от 16% до 24%?

Решение.

Пусть $x\%$ -прибыль первого проекта, $y\%$ -прибыль второго проекта, $r\%$ - ставка кредитования, S – вложенная сумма. Тогда чистая прибыль составит

$$\frac{2}{3}S\left(1+\frac{x}{100}\right)+\frac{1}{3}S\left(1+\frac{y}{100}\right)-S\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{S}{100}\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}-r\right).$$

По условию,

$$0{,}16S \le \frac{S}{100}\left(\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}-r\right) \le 0{,}24S,$$

$$48 \le 2x+y-3r \le 72,$$

$$2x+y-72 \le 3r \le 2x+y-48.$$

Неравенства должны выполняться для всех $x \in [38{,}44]$, $y \in [20{,}23]$, то есть

$$\max\{2x+y-72\} \le 3r \le \min\{2x+y-48\}.$$

$2x+y-72 \le 2\cdot 44+23-72=39$, $2x+y-48 \ge 2\cdot 38+20-48=48$.

Таким образом, $13 \le r \le 16$.

Ответ: 13% и 16%.

Задача 4

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x - a = 3|3|x| - a^2|$$

имеет ровно три решения. Найдите эти решения.

Решение.

Если $a = 0$, уравнение примет вид $x = 9|x|$, $x = 0$ – единственный корень. Построим эскизы графиков функций $y = 3|3|x| - a^2|$ и $y = x - a$ при $a \neq 0$.Прямая $y = x - a$ пересекает график функции $y = 3|3|x| - a^2|$ в трех точках, если проходит через точку $(-a^2/3\,, 0)$или через точку $(0, 3a^2)$, как показано на рисунке.

В первом случае получаем

$$0 = -\frac{a^2}{3} - a, \quad a = -3.$$

Уравнение принимает вид

$$x + 3 = 9\big||x| - 3\big|,$$

$$x + 3 = 9(|x| - 3) \text{ или } x + 3 = 9(3 - |x|),$$

$$9|x| - x = 30 \text{или } 9|x| + x = 24,$$

$$x = 15/4 = 3{,}75,\ x = -3,\ x = 2{,}4.$$

Во втором случае

$$3a^2 = -a,\ a = -1/3.$$

После подстановки и умножения на 3 уравнение принимает вид

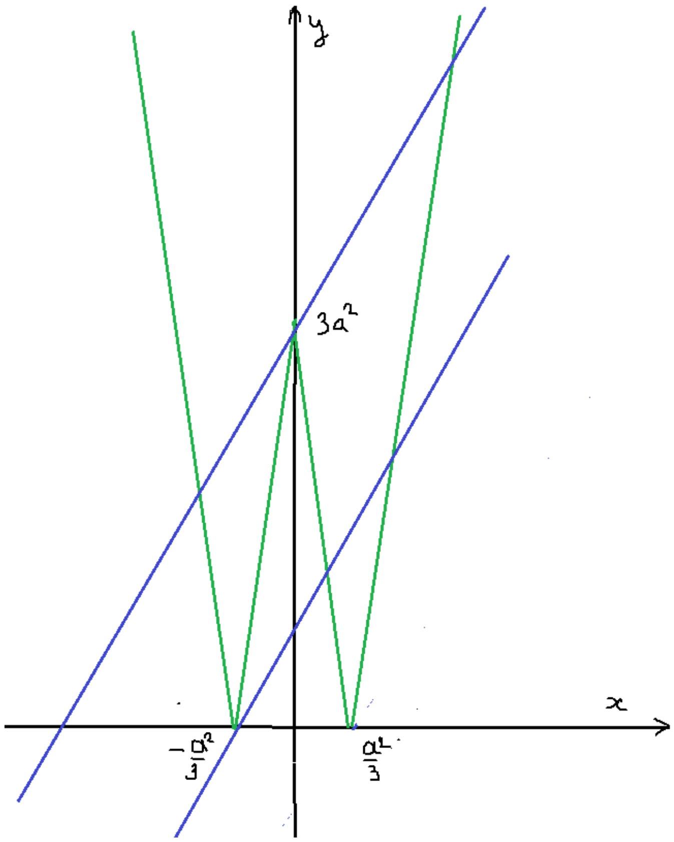
$$3x + 1 = |27|x| - 1|,$$

$$3x + 1 = 27|x| - 1 \text{ или } 3x + 1 = 1 - 27|x|,$$

$$27|x| - 3x = 2 \text{или } 27|x| + 3x = 0,$$

$$x = 1/12,\ x = -1/15 \text{или } x = 0.$$

Ответ: при $a = -3$решения $x = 3{,}75$, $x = -3$, $x = 2{,}4$;
при $a = -1/3$решения $x = 1/12$, $x = -1/15$, $x = 0$.



Задача 5

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} y \le 5 - |x-1| \\ 3 - y \le \sqrt{3 - x^2 + 2x} \end{cases}$$

Решение. Решим графически первое неравенство. Построим график функции

$$y = 5 - |x-1|.$$

В начале координат, точке $(0,0)$, неравенство выполняется, поэтому решением неравенства будет множество координат точек, лежащих в той же части плоскости относительно графика, что и точка $(0,0)$.

Решим графически второе неравенство. Если $y > 3$, то неравенство выполнено для всех x таких, что $3 - x^2 + 2x \ge 0$, то есть $-1 \le x \le 3$. Если $y \le 3$, возведём обе части неравенства в квадрат:

$$(3-y)^2 \le 4 - (x-1)^2,$$
$$(3-y)^2 + (x-1)^2 \le 4.$$

Равенство $(3-y)^2 + (x-1)^2 = 4$ - это уравнение окружности с центром в точке $(1,3)$радиуса 2. Неравенству удовлетворяют точки внутри этой окружности.

Найдём точки пересечения окружности и ломаной.

$$(3 - 5 + |x-1|)^2 + (x-1)^2 = 4,$$
$$2(x-1)^2 - 4|x-1| = 0,$$
$$|x-1| = 0 \text{ или } |x-1| = 2,$$
$$x = 1, y = 5; x = -1, y = 3; x = 3, y = 3.$$

Таким образом, фигура состоит из треугольника с вершинами в точках $(-1,3)$, $(1,5)$, $(3,3)$и полукруга. Её площадь равна

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 + 2\pi.$$

Ответ: $4 + 2\pi$.