Задание № 4

Задача 1

После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найдите это двузначное число.

Решение.

Обозначим искомое двузначное число $\overline{xy}$, $\overline{xy} = 10x + y$. Тогда, по условию задачи, $10x + y = 7(x + y) + 6$ и $10x + y = 3xy + 11$, причем, x и y – цифры, произведение которых отлично от нуля (так как по условию задачи на произведение цифр числа само число можно разделить с остатком), следовательно, обе цифры x и y отличны от нуля. Таким образом, каждая из цифр может принимать одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Чтобы найти двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи, нужно на множестве {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x + y = 7(x + y) + 6, \\ 10x + y = 3xy + 11. \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения системы: $10x + y = 7x + 7y + 6$; $3x = 6y + 6$; $x = 2y + 2$. Найденное выражение для x подставим во второе уравнение системы. Получим уравнение относительно переменной y: $10(2y + 2) + y = 3(2y + 2)y + 11$. Найдем решения полученного уравнения, принадлежащие множеству {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}:

$$10(2y + 2) + y = 3(2y + 2)y + 11;$$
$$20y + 20 + y = 6y^2 + 6y + 11;$$
$$6y^2 - 15y - 9 = 0;$$
$$2y^2 - 5y - 3 = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$2y^2 - 5y - 3 = 2y^2 - 6y + y - 3 = 2y(y - 3) + (y - 3) = (2y + 1)(y - 3).$$

Тогда уравнение принимает вид $(2y + 1)(y - 3) = 0$. Так как нам нужны решения уравнения, принадлежащие множеству {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, то множитель $(2y + 1)$ принимает положительные значения, следовательно, $y - 3 = 0$, $y = 3$. При $y = 3$ $x = 2y + 2 = 2\cdot3 + 2 = 8$. Тогда искомое двузначное число равно $\overline{xy} = 10x + y = 83$.

Ответ. 83.

Задача 2

Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{a(x-3)}{x+a}=2.$

Решение.

В данном уравнении присутствуют две переменные a и x, но у этих переменных разный смысл: x – неизвестная, a – постоянная (которая получила название параметр). Специфика задач с параметром состоит в следующем: рассматривается не одно уравнение, а целое семейство уравнений одновременно, в котором каждое уравнение семейства получается при конкретном значении параметра. Так как параметр может принимать бесконечное множество различных значений, то выписать все уравнения семейства мы не сможем. Однако каждое уравнение семейства должно быть решено.

Чтобы решить каждое из уравнений заданного семейства поступают следующим образом: все множество допустимых значений параметра (тех значений, при которых уравнение имеет смысл) разбивают на подмножества и решают задачу на каждом из подмножеств. Чтобы множество допустимых значений параметра разбить на подмножества, нужно найти те значения параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение задачи.

Допустимыми значениями параметра являются любые действительные числа. Преобразуем уравнение: $\frac{a(x-3)}{x+a}=2$; $\frac{a(x-3)}{x+a}-2=0$; $\frac{a(x-3)-2(x+a)}{x+a}=0$. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен 0, а знаменатель не равен нулю, то есть уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a(x-3)-2(x+a)=0, \\ x+a\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax-3a-2x-2a=0, \\ x+a\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)x-5a=0, \\ x+a\neq 0. \end{cases}$$

Система разбивает множество допустимых значений параметра на два подмножества.

1) $a-2=0$; $a=2$. При $a=2$ система принимает вид

$$\begin{cases} 0\cdot x=10, \\ x\neq -a. \end{cases}$$

Первому уравнению системы не удовлетворяет ни одно действительное число, следовательно, система не имеет решений, а поэтому при $a = 2$ исходное уравнение не имеет решений.

2) $a \neq 2$. При $a \neq 2$ решим систему $\begin{cases} (a-2)x - 5a = 0, \\ x + a \neq 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} (a-2)x = 5a, \\ x + a \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5a}{a-2}, \\ x \neq -a. \end{cases}$$

Чтобы решить полученную систему, нужно найти значения параметра, удовлетворяющие условию $a \neq 2$, при которых $\dfrac{5a}{a-2}$ совпадет с $(-a)$.

$$\begin{cases} \dfrac{5a}{a-2} = -a, \\ a \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a = -a(a-2), \\ a \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 3a = 0, \\ a \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+3) = 0, \\ a \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,\ a = -3, \\ a \neq 2; \end{cases}$$

$$a = 0;\ a = -3.$$

Получили, что множество значений параметра $a \neq 2$ разбивается на три подмножества:

2.1) $a = 0$. При $a = 0$ система $\begin{cases} x = \dfrac{5a}{a-2}, \\ x \neq -a \end{cases}$ принимает вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Полученная система решений не имеет, значит, при $a = 0$ исходное уравнение не имеет решений.

2.2) $a = -3$. При $a = -3$ система $\begin{cases} x = \dfrac{5a}{a-2}, \\ x \neq -a \end{cases}$ принимает вид

$$\begin{cases} x = 3, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Полученная система решений не имеет, значит, при $a = -3$ исходное уравнение не имеет решений.

2.3) $\begin{cases} a \neq -3, \\ a \neq 0, \\ a \neq 2. \end{cases}$ При $a \neq -3$, $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $\dfrac{5a}{a-2} \neq -a$, а поэтому решением системы $\begin{cases} x = \dfrac{5a}{a-2}, \\ x \neq -a \end{cases}$ является $x = \dfrac{5a}{a-2}$. Таким образом, при $a \neq -3$, $a \neq 0$ и $a \neq 2$ уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{5a}{a-2}$.

Ответ. При $a = -3$, $a = 0$ или $a = 2$ уравнение не имеет корней;

при $a \neq -3$, $a \neq 0$ и $a \neq 2$ $x = \dfrac{5a}{a-2}$.

Задача 3

Докажите, что если $x^2 - yz = a$, $y^2 - xz = b$, $z^2 - xy = c$, то $ax + by + cz = (a + b + c)(x + y + z)$.

Решение.

Подставим в левую часть равенства вместо a, b *и* с равные им выражения из условия задачи и преобразуем полученное выражение. Получим:

$$ax + by + cz = (x^2 - yz)x + (y^2 - xz)y + (z^2 - xy)z = x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Подставим в правую часть равенства вместо a, b *и* с равные им выражения из условия задачи и преобразуем полученное выражение. Получим:

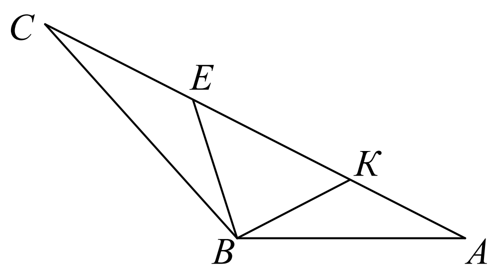
$$(a + b + c)(x + y + z) = (x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy)(x + y + z) = x^3 - xyz + xy^2 - x^2z +$$
$$+ xz^2 - x^2y + x^2y - y^2z + y^3 - xyz + yz^2 - xy^2 + x^2z - yz^2 + y^2z - xz^2 + z^3 - xyz =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Так как $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, тогда если $x^2 - yz = a$, $y^2 - xz = b$, $z^2 - xy = c$, то $ax + by + cz = (a + b + c)(x + y + z)$, **что и требовалось доказать.**

Задача 4

В треугольнике ABC $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$. На стороне AC отмечены точки K и E так, что $AK = KB$ и $BE = EC$. Докажите, что $AK < AE$. Найдите $\angle KBE$.

Решение.



Рассмотрим ΔABC. По теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle ABC + \angle C = 180°$. Тогда $\angle C = 180° - (\angle ABC + \angle A) = 180° - (110° + 38°) = 32°$.

Рассмотрим ΔAKB. $AK = KB$ по условию, следовательно, ΔAKB – равнобедренный с основанием AB по определению, значит, $\angle KBA = \angle A = 38°$ как углы при основании равнобедренного треугольника (по свойству).

Рассмотрим ΔBEC. $BE = EC$ по условию, следовательно, ΔBEC – равнобедренный с основанием BC по определению, значит, $\angle CBE = \angle C = 32°$ как углы при основании равнобедренного треугольника (по свойству). Тогда $\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 110° - 32° = 78°$.

Так как $\angle ABK = 38°$, а $\angle ABE = 78°$, то есть $\angle ABK < \angle ABE$, лучи BK и BE лежат по одну сторону относительно прямой AB, то луч BK лежит внутри угла ABE, следовательно, точка K лежит между точками A и E на прямой AC, значит, $AK < AE$, **что и требовалось доказать.**

Так как луч BK лежит внутри угла ABE, то $\angle KBE = \angle ABE - \angle ABK = 78° - 38° = 40°$.

Ответ. $\angle KBE = 40°$.

Задача 5

Имеется 83 монеты. Среди них 82 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от настоящей по весу. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая?

Решение.

Разделим 83 монеты на три группы: в первой группе 27 монет, во второй группе 27 монет, в третьей группе 29 монет.

<u>1 взвешивание.</u> На одну чашу весов кладем 27 монет первой группы, а на вторую чашу – 27 монет второй группы. Возможно два случая.

1 случай.

Весы находятся в равновесии. Значит, все монеты в первой и второй группах настоящие, а фальшивая монета находится в третьей группе. Тогда добавляем в первую группу две монеты из второй группы, а остальные 25 монет второй группы откладываем в сторону.

<u>2 взвешивание.</u> На одну чашу весов кладем 27 монет первой группы и 2 монеты второй группы, а на другую – 29 монет третьей группы. Если третья группа окажется легче, то фальшивая монета легче настоящей, а если третья группа окажется тяжелее, то фальшивая монета тяжелее настоящей. (Весы при втором взвешивании в равновесии оказаться не могут, так как на одной чаше одна из монет фальшивая, которая отличается по весу от настоящей.)

2 случай.

Весы при первом взвешивании не находятся в равновесии. В этом случае фальшивая монета находится в первой или во второй группе, а все 29 монет третьей группы являются настоящими. Отложим в сторону 2 монеты из третьей группы.

<u>2 взвешивание.</u> На одну чашу весов кладем 27 монет первой группы, на другую – 27 монет третьей группы.

Если весы находятся в равновесии, то все монеты первой группы настоящие, а фальшивая монета во второй группе. Если при первом взвешивании монеты второй группы были легче, чем монеты первой группы, то фальшивая монета легче настоящей, а если при первом взвешивании монеты второй группы были тяжелее, чем монеты первой группы, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

Если весы не находятся в равновесии, то фальшивая монета в первой группе. Если монеты первой группы легче, чем монеты третьей группы, то фальшивая монета легче настоящей, а если монеты первой группы тяжелее, чем монеты третьей группы, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

Замечание. Делить монеты на три группы можно по разному, главное, чтобы в двух группах количество монет было одинаковым, а третьей группе монет было не меньше, чем в первой, но не больше, чем в первой и во второй одновременно. Логика решения задачи в этом случае не изменяется.