Задание № 4

Задача 1

Решить уравнение $x^2(1+x)^2 + x^2 = 8(1+x)^2$.

Решение.

Перенесем $8(1 + x)^2$ в левую часть уравнения и разложим $x^2(1 + x)^2 + x^2 - 8(1 + x)^2$ на множители, представив $8(1 + x)^2$ как $4(1 + x)^2 + 4(1 + x)^2$ и применив метод группировки:

$$x^2(1 + x)^2 + x^2 - 8(1 + x)^2 = x^2(1 + x)^2 - 4(1 + x)^2 - 4(1 + x)^2 + x^2 = (1 + x)^2(x^2 - 4) -$$

$$- (4(1 + x)^2 - x^2) = (1 + x)^2(x - 2)(x + 2) - (2x + 2 - x)(2x + 2 + x) =$$

$$= (1 + x)^2(x - 2)(x + 2) - (x + 2)(3x + 2) = (x + 2)((1 + x)^2(x - 2) - (3x + 2)).$$

Разложим на множители $(1 + x)^2(x - 2) - (3x + 2)$:

$$(1 + x)^2(x - 2) - (3x + 2) = (x^2 + 2x + 1)(x - 2) - 3x - 2 = x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2 -$$

$$- 3x - 2 = x^3 - 6x - 4 = x^3 + 8 - 6x - 4 - 8 = (x^3 + 8) - (6x + 12) =$$

$$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 6(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 6) = (x + 2)(x^2 - 2x - 2).$$

Таким образом, $x^2(1 + x)^2 + x^2 - 8(1 + x)^2 = (x + 2)^2(x^2 - 2x - 2)$,

а уравнение принимает вид:

$$(x + 2)^2(x^2 - 2x - 2) = 0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а остальные существуют. Так как оба множителя существуют при любом x, то

$$(x + 2)^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Квадрат равен нулю тогда и только тогда, когда основание степени равно нулю, а в квадратном уравнении выделим полный квадрат относительно x:

$x + 2 = 0$;

$x = -2$.

$x^2 - 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 2 = 0$;

$(x - 1)^2 = 3$;

$x - 1 = \pm\sqrt{3}$;

$x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Ответ. $x = -2$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Задача 2

Упростить $\dfrac{\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{1-\sqrt{3}}$ и сравнить результат с числом –1,2.

Решение.

Преобразуем число $4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$, вынося общий множитель за скобку и выделяя полный квадрат. Получим,

$$4\sqrt{2}-2\sqrt{6}=4\sqrt{2}-2\sqrt{2\cdot 3}=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\left(3-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2.$$

Тогда $\dfrac{\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\left|\sqrt{3}-1\right|}{1-\sqrt{3}}$.

Так как $\sqrt{3}>1$, то $\sqrt{3}-1>0$, значит, $\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$, тогда

$$\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\left|\sqrt{3}-1\right|}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{-\left(\sqrt{3}-1\right)}=-\sqrt{\sqrt{2}}=-\sqrt[4]{2}.$$

Чтобы сравнить число $-\sqrt[4]{2}$ с числом –1,2, найдем четвертую степень $\sqrt[4]{2}$ и 1,2. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^4=2$, $(1{,}2)^4=((1{,}2)^2)^2=(1{,}44)^2=2{,}0736$. Так как $2<2{,}0736$, то $\sqrt[4]{2}<1{,}2$, следовательно, $-\sqrt[4]{2}>-1{,}2$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{1-\sqrt{3}}=-\sqrt{\sqrt{2}}=-\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}>-1{,}2$.

Задача 3

Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y=(12-a-a^2)x^2+8x$ и $y=5-2ax$ имеют единственную общую точку.

Решение.

Графики функций $y=(12-a-a^2)x^2+8x$ и $y=5-2ax$ имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} y=(12-a-a^2)x^2+8x, \\ y=5-2ax \end{cases}$$

имеет единственное решение. А система уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение $(12-a-a^2)x^2+8x=5-2ax$ будет иметь единственное решение. Полученное уравнение является квадратным уравнением с параметром $(12-a-a^2)x^2+2(a+4)x-5=0$, которое единственное решение может иметь в двух случаях:

I. Старший коэффициент уравнения равен нулю, а коэффициент перед x в ноль не обращается, то есть уравнение является линейным с отличным от нуля коэффициентом перед x.

II. Старший коэффициент уравнения отличен от нуля и дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то есть уравнение является квадратным и имеет единственный корень.

Для каждого из двух возможных случаев составим и решим систему ограничений на параметр.

I. $\begin{cases} 12 - a - a^2 = 0, \\ 2(a+4) \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 + a - 12 = 0, \\ a + 4 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 + 4a - 3a - 12 = 0, \\ a \neq -4; \end{cases}$

$\begin{cases} a(a+4) - 3(a+4) = 0, \\ a \neq -4; \end{cases}$

$\begin{cases} (a-3)(a+4) = 0, \\ a \neq -4; \end{cases}$

$\begin{cases} a = 3,\ a = -4, \\ a \neq -4; \end{cases}$

$a = 3.$

II. $\begin{cases} 12 - a - a^2 \neq 0, \\ 4(a+4)^2 + 20(12 - a - a^2) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq 3, \\ a \neq -4, \\ 4(a+4)^2 - 20(a-3)(a+4) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq 3, \\ a \neq -4, \\ 4(a+4)(a+4-5(a-3)) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq 3, \\ a \neq -4, \\ 4(a+4)(19-4a) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq 3, \\ a \neq -4, \\ a = -4,\ a = \dfrac{19}{4}; \end{cases}$.

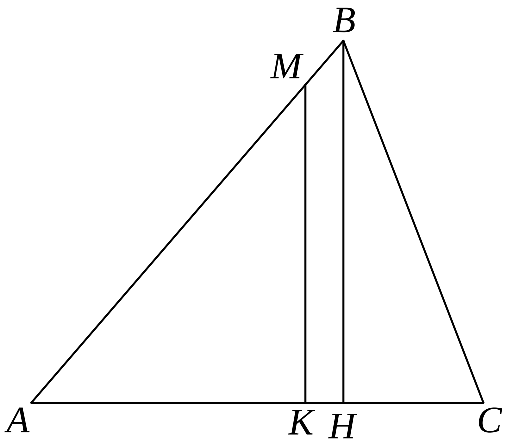
$a = \dfrac{19}{4}.$

Ответ. $a = \dfrac{19}{4}$, $a = 3$.

Задача 4

Основание треугольника делится высотою на части в 36 см и 14 см. Перпендикулярно основанию проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части (части с равными площадями). На какие части эта прямая разбила основание треугольника?

Решение.



Пусть BH – высота треугольника ABC, причем $AH = 36$ см, $CH = 14$ см. $MK \perp AC$, $K \in AC$, M лежит на стороне треугольника ABC, причем прямая MK разделила треугольник ABC на две равновеликие части. Нужно найти AK и KC.

Так как $AH > HC$, то $S_{BAH} > S_{BHC}$, а по условию задачи прямая MK делит треугольник ABC на две равновеликие части, значит, $M \in AB$.

Обозначим $BH = a$, тогда $S_{BAH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 36a = 18a$, $S_{BCH} = \frac{1}{2} CH \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 14a = 7a$, $S_{ABC} = S_{BAH} + S_{BHC} = 18a + 7a = 25a$, $S_{AKM} = 0{,}5 \cdot S_{ABC} = 0{,}5 \cdot 25a = 12{,}5a$.

Рассмотрим ΔABH и ΔAMK. $\angle A$ – общий, $\angle AHB = \angle AKM = 90°$, значит, $\Delta ABH \sim \Delta AMK$ по двум углам, следовательно, $\frac{S_{ABH}}{S_{AMK}} = \left(\frac{AH}{AK}\right)^2$, $\frac{18a}{12{,}5a} = \left(\frac{36}{AK}\right)^2$, $\frac{18 \cdot 2}{25} = \left(\frac{36}{AK}\right)^2$, $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{36}{AK}\right)^2$, $\frac{6}{5} = \frac{36}{AK}$, $AK = \frac{36 \cdot 5}{6} = 30\,$(см). Тогда $KC = KH + HC = AH - AK + HC = 36 - 30 + 14 = 20$(см).

Ответ. 30 см и 20 см.

Задача 5

Пункт M находится между пристанями A и B на равных расстояниях от них. Из A в B и из B в A одновременно вышли два катера с собственными скоростями по 18 км/ч. Когда первый катер поровнялся с M, второй был в 8 км от M. Когда второй катер поровнялся с M, расстояние между катерами было 10 км. Найдите скорость течения.

Решение.

Обозначим, a км/ч – скорость течения, тогда скорость катера по течению равна $(18 + a)$ км/ч, а против течения – $(18 – a)$ км/ч. Первым с пунктом M поравняется катер, идущий по течению, в этот момент катеру, идущему против течения, останется пройти до M 8 км. Когда с пунктом M поравняется катер, идущий против течения, катер, идущий по течению, удалится от M на 10 км. Таким образом, за одно и тоже время катер, идущий по течению, проходит 10 км, а катер, идущий против течения, проходит 8 км. Получаем уравнение $\frac{10}{18+a}=\frac{8}{18-a}$. Решим полученное уравнение:

$$\frac{10}{18+a}=\frac{8}{18-a},$$

$$\begin{cases} 10(18-a)=8(18+a), \\ 18-a\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(18-a)=4(18+a), \\ a\neq 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90-5a=72+4a, \\ a\neq 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a=18, \\ a\neq 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2, \\ a\neq 18; \end{cases}$$

$$a = 2.$$

Таким образом, скорость течения равна 2 км/ч.

Ответ. 2 км/ч.