ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2024-2025 учебный год)

Задание 4

Задача 1

Решите ребус:

$$\text{УРОК} = \text{РОК} \cdot \text{ОК}$$

Решение.

Обозначим двузначное число, зашифрованное буквами ОК, через x. Тогда получаем

$$\text{У} \cdot 1000 + \text{Р} \cdot 100 + x = (\text{Р} \cdot 100 + x)x,$$
$$(\text{У} \cdot 10 + \text{Р} - \text{Р}x) \cdot 100 = x(x - 1)$$

Таким образом, произведение чисел x и $(x-1)$ делится на 100. Так как числа x и $(x-1)$ взаимно простые, одно из них нечетное и делится на 25 (то есть равно 25 или 75) а второе делится на 4. Из чисел 24, 26, 74, 76 на 4 делятся 24 и 76.

Пусть $x = 25$, $x - 1 = 24$. Тогда

$$\text{У} \cdot 10 - 24 \cdot \text{Р} = 6, \quad \text{У} \cdot 5 = 12 \cdot \text{Р} + 3,$$

число $12 \cdot \text{Р} + 3$ делится на 5, поэтому $\text{Р} = 1$ или $\text{Р} = 6$, в первом случае $\text{У} = 3$, во втором $\text{У} = 15$ (не подходит).

Пусть $x = 76$, $x - 1 = 75$. Тогда

$$\text{У} \cdot 10 - 75 \cdot \text{Р} = 57,\ \text{У} \cdot 10 = 75 \cdot \text{Р} + 57.$$

Так как число 57 не делится на 5, это уравнение не имеет решений в целых числах

Ответ: 3125.

Задача 2

Из грота в аквариуме, в котором прячутся 5 красных и 5 синих рыбок, одна за другой выплывают три рыбки. При этом a) рыбки сразу же возвращаются в грот; b) продолжают плавать рядом с гротом. В каком случае больше шансов увидеть среди этих рыбок только одну красную?

Решение

В случае а) каждый раз может выплыть любая из 10 рыбок, то есть всевозможных исходов $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Подсчитаем количество исходов, при которых красная рыбка выплывает точно один раз. Она может выплыть первой, второй или третьей, в каждом из этих трех случаев имеется $5 \cdot 5 \cdot 5$ возможных исходов, поэтому вероятность равна

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{3}{8}.$$

В случае б) общее количество исходов равно C_{10}^3, а количество исходов, при которых выплыла одна красная рыбка (и, следовательно, 2 синие рыбки) - $C_5^1 \cdot C_5^2$.Вероятность равна

$$\frac{C_5^1 \cdot C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{7! \cdot 3! \cdot 5 \cdot 5!}{10! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5}{12}.$$

Таким образом, в случае б) вероятность немного больше ($10/24$ против $9/24$).

Ответ: в случае б).

Задача 3

Сумма первых одиннадцати членов арифметической прогрессии больше 203, но меньше 217. Все члены этой прогрессии- натуральные числа. Пятый член равен 16. Найдите сумму первых пятидесяти членов этой прогрессии.

Решение.

Пусть a – первый член прогрессии, d–её разность. Тогда

$$S_{11} = \frac{2a + 10d}{2} \cdot 11 = 11(a + 5d).$$

По условию, $203 < 11(a + 5d) < 217$, то есть $a + 5d = 19$.

Пятый член прогрессии равен $a + 4d = 16$. Таким образом, $d = 3$, $a = 4$,

$$S_{50} = \frac{2a + 49d}{2} \cdot 50 = (8 + 147) \cdot 25 = 3875.$$

Ответ: 3875.

Задача 4

При каких натуральных значениях a существует единственная пара натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$ax^3 + xy - 25a = 0?$$

Решение.

Так как

$$a(x^3 - 25) + xy = 0,$$

$x^3 < 25$, то есть $x = 1$ или $x = 2$.

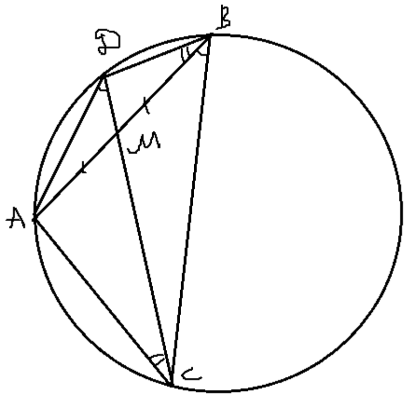
В первом случае $y = 24a$, во втором - $2y = 17a$.

Таким образом, если a – четное число, уравнение будет иметь два решения - $(1, 24a)$ и $(2, 17a/2)$, а если a – нечетное число, то только одно.

Ответ: при нечетных a $x = 1, y = 24a$.

Задача 5

Около треугольника *ABC* описана окружность. Продолжение медианы*CM* треугольника пересекает окружность в точке *D*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AB*=4, *DM*=1 и*BC*=2*AC*.



Решение.

Пусть $AC = x$, $BC = 2x$. Четырехугольник $ADBC$ вписан в окружность, поэтому треугольник ADM подобен треугольнику CBM,

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} = \frac{AD}{BC},$$

то есть $CM = AM \cdot BM/DM = 4$, $AD = BC \cdot DM/BM = x$.

Пусть угол AMCравен φ. Тогда $\cos\angle BMC = -\cos\varphi$. Применим теорему косинусов к треугольникам AMCи BMC:

$$x^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos\varphi,$$

$$4x^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos\varphi.$$

Получаем, $5x^2 = 40$, $x = 2\sqrt{2}$.

Таким образом, стороны треугольника равны 4, $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$. По формуле Герона

$$S = \sqrt{\left(2 + 3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2} - 2\right)\left(2 + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right)} = \sqrt{14 \cdot 2} = 2\sqrt{7}.$$

Ответ:$2\sqrt{7}$.