**Студенческая математическая олимпиада им. Л.П. Шильникова. 2025**

1. Существует ли отличная от константы непрерывная функция на множестве действительных чисел, значения которой в иррациональных точках рациональны?

**Ответ**:не существует**. Решение.** Пусть, от противного, такая функция *f* существует.Множество значений*f*(**R**) равно объединению множеств *f*(**Q**) и *f*(**R**\**Q**). Поскольку множество рациональных чисел счётно, то по условию задачи *f*(**R**) есть объединение двух счетных множеств, а значит – счетное множество. Но по теореме Больцано-Коши непрерывная на промежутке функция принимает все промежуточные значения между двумя любыми своими значениями. Таким образом, из условия непостоянства *f* заключаем, что *f*(**R**) имеет мощность континуум. Получили противоречие.

1. Существует ли невырожденная квадратная матрица *А* нечетного порядка с действительными коэффициентами, удовлетворяющая уравнению *А*3 + 2*А*Т = 0?

# $ $ Ответ: не существует. Решение. Предположим, от противного, что такая матрица *А* существует и пусть *n* – её порядок. Тогда *А*3 = –2*А*Т  , и по свойствам определителей (det*А*)3 = (–2)ndet*А*. В силу нечетности *n* имеем (det*А*)3 + det*А* = 0. Разделив это уравнение на det*А* ≠ 0, получаем (det*А*)2 + = 0. Противоречие.

1. На клетки шахматной доски произвольным образом поставили 17 королей. Всегда ли можно убрать с доски 12 королей так, чтобы из оставшихся 5 королей ни один не бил другого? (Король бьет все клетки, соседние с его клеткой по стороне или вершине.)

**Ответ:** всегда. **Решение. Р**азобьем доску на 16 квадратиков 2×2 и каждый квадратик раскрасим в четыре цвета  (можно раскрасить так угловой квадратик, а потом параллельно переносить раскраску на другие квадратики 2×2) – см. рис. Очевидно, любые два короля, поставленные на клетки одного цвета, не бьют друг друга. У нас 17 королей и всего 4 цвета. Значит (по принципу Дирихле или рассуждая от противного), найдутся 5 королей на клетках одного цвета. Этих королей оставляем на доске.



1. Прямая *d* в пространстве, перпендикулярная плоскости треугольника *АВС*, проходит через вершину *А*. Углы *А, В, С* треугольника *АВС* равны, соответственно, , причем углы *В* и *С* острые. Для точки  обозначим  Найдите множество значений функции , когда *М* пробегает прямую *d*.

**Ответ:**  при и  при . **Решение**. Пусть *К* – проекция точки *А* на прямую *ВС*. Поскольку углы *В* и *С* острые, *К* лежит внутри отрезка *ВС*. По теореме о трёх перпендикулярах . Обозначим    Тогда  При движении *М* от точки *А* по прямой *d* вдоль любого из двух лучей монотонно убывает от 1 до 0 (на бесконечности). Поскольку *ВК* и *АК* постоянные, то tg, а значит и , монотонно убывает до нуля. Аналогично,  монотонно убывает до нуля. Таким образом, монотонно убывает от  до нуля .Учитывая поведение функции синус в первой и второй четвертях, получаем ответ в зависимости от величины . *Комментарий. В данном решении существенно использовалось то, что точка К* *лежит внутри отрезка* *ВС, и тогда получилось, что угол*  *монотонно убывает при движении М по лучу в бесконечность, и в частности, он меньше* *. Если угол В или С тупой, то может изменяться немонотонно и может быть больше* *.*

1. Последовательность *an* задается рекуррентно: ; ,  Какова вероятность, что случайно выбранный член этой последовательности является целым числом?

**Ответ:** 1/6**. Решение**. Выражение для  перепишем в виде . Поэтому для  будем иметь =. Тогда . Поскольку , то  при всех натуральных *k,* и степени двойки дают остатки (mod 9) c периодом 6, а именно: 2, 4, 8, 7, 5, 1. Итак, члены подпоследовательности  (каждый шестой), и только они, будут целыми числами и поэтому искомая статистическая вероятность равна 1/6. *Комментарий. Формулу общего члена в данной задаче можно было получить без приведенных выше преобразований, а пользуясь стандартным методом решения линейных рекуррентных уравнений (через характеристический многочлен и его корни, подобно тому, как решаются линейные дифференциальные уравнения).*

1. Пусть *P*(*x*) =  Докажите, что у многочлена  (после приведения подобных членов) имеется **а)** хотя бы один иррациональный коэффициент; **б**) хотя бы два иррациональных коэффициента **Решение**. *1-й способ.* **a)** Значение  равно сумме коэффициентов *P*(*x*), а число  равно сумме коэффициентов многочлена (*P*(*x*))2025. Значит, у этого многочлена есть хотя бы один иррациональный коэффициент. **б)**. Подсчитаем *P*(–1) = 22. Поэтому значение многочлена (*P*(*x*))2025 при *х* = –1 (оно равно альтернированной сумме коэффициентов, т.е. сумме с чередующимися знаками) есть рациональное число, равное 222025, а значит, у многочлена (*P*(*x*))2025 иррациональный коэффициент не может быть единственным.

*2-ой способ*. Для кубического многочлена  обозначим через *a* и *b* его коэффициенты при и : , и пусть . Легко подсчитать, что *an* = *an*  и *bn* = *nan*–1*b* (вторая формула получается из правила перемножения многочленов и легко проверяется по индукции). В нашем случае , . Осталось проверить, что любая натуральная степень числа  иррациональна. Это можно сделать либо с помощью бинома Ньютона (учитывая, что все коэффициенты разложения  при  в нечетных степенях *k* одного знака, а именно, при нечетном *n* все они положительны, а при четном – отрицательны), либо по индукции, либо проверив, что при умножении чисел вида , где *А, В* одного знака и *C, D* одного знака, получается число вида , где *E* и *F* также одного знака, и в частности, *F*.

1. Дана последовательность . **а**) Докажите, что . **б**) Вычислите .

**Ответ**: **б)** 2. **Решение**. **а)** Результат следует из расходимости несобственногоинтеграла =, а расходимость интеграла, в свою очередь, следует из признака сравнения (для положительных подынтегральных функций в силу первого замечательного предела) с расходящимся интегралом . **б)** Из пункта **а)** следует, что можно применить правило Лопиталя к неопределенности вида  при вычислении . Тогда дифференцируя интеграл с переменным верхним пределом, получим .

1. Дан положительный расходящийся ряд . Пусть – его *n*-ая частичная сумма. Докажите, что ряд **а)**  расходится; **б**)расходится; **в**) сходится.

**Решение**. **а)** Если последовательность общего члена *an* неограничена, то найдется бесконечно большая подпоследовательность , но тогда , что противоречит необходимому условию сходимости рядов. Если же *an* – ограниченная последовательность, скажем, 0 < *an* < *C* для некоторого *С*, то  и по признаку сравнения положительных рядов из расходимости исходного ряда следует расходимость данного ряда. **б)** Запишем . Если последовательность  не стремится к единице, то данный ряд расходится в силу необходимого условия сходимости. Таким образом, осталось доказать расходимость положительного ряда  с общим членом, стремящимся к нулю. Для произвольного положительного ряда с бесконечно малыми  из признака сравнения следует, что он сходится (или расходится) одновременно с положительным рядом , имеющим эквивалентные с общие члены., В данной задаче мы сравниваем ряд  с рядом . Таким образом, по свойству логарифмов имеем  при  (т.к. исходный ряд расходится). **в)** Сравним данный ряд с рядом, имеющим общий член . Отношение общих членов равно . Поэтому из сходимости второго ряда будет следовать требуемая сходимость данного ряда. Но сходимость второго ряда получается последовательным суммированием с взаимным уничтожением соответствующих членов, так что  при  (в силу расходимости исходного ряда).

1. Сколько решений в натуральных числах *х*, *у* имеет система уравнений  ?

**Ответ:** 28. **Решение.** Задачу в более общем виде можно сформулировать так: для данных натуральных *А, В* найти натуральные *х*, *у* из системы уравнений , . *1-й способ решения.*Для *х*, *у* совокупность всех их простых делителей обозначим  и представим канонические разложения

(\*) , , где  – неотрицательные целые, тогда

 

Требуется найти канонические разложения (\*) для данных *А, В*. Если разложения *А* и *В* имеют вид , , то при всех *i* (иначе система не имеет решений). Если , то . Если же , то либо , либо наоборот: . Аналогичное рассуждение справедливо для остальных индексов. Таким образом, различные решения (*х*, *у*) определяются указанным выбором  в случае, когда , а именно в каждом таком случае есть выбор из двух вариантов: «кому из двух» – иксу или игреку – «отдать» показатель  или . В данной задаче для *А*= 20! и *В*= 30! имеется ровно 8 простых делителей, для которых , а именно 2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 29. Действительно, степень вхождения простого числа *p* в разложение *n*! равна, как известно, +… и поэтому у всех простых чисел, меньших 30, кроме 17 и 19, степень вхождения в разложение 20! строго меньше, чем в разложение 30! Итак, количество различных вариантов выбора упорядоченных наборов  равно 28= 256. *2-й способ решения.* Как известно, имеется соотношение  для любых натуральных *х*, *у*. Обозначим . . Тогда  и взаимно просты и удовлетворяют уравнению. В нашей задаче, представив в каноническом разложении число 30!/20! = , получим уравнение . В правой части стоит произведение восьми попарно взаимно простых степеней простых чисел. Выбор взаимно простых  и , удовлетворяющих уравнению, соответствует выбору подмножества из этих восьми сомножителей (подмножество соответствует разложению , а его дополнение – разложению). Число всех подмножеств 8-элементного множества равно 

1. Существует ли тетраэдр, у которого в основании лежит тупоугольный треугольник, а периметры всех граней совпадают?

**Ответ:** не существует. **Решение.** Предположим, от противного, что такой тетраэдр *ABCD* существует. Из равенства периметров Δ*ADC* и Δ*ABC* получим равенство , а из равенства периметров Δ*ADB* и Δ*СDB* получим равенство . Складывая эти равенства, получим , т.е. *AD* = *BC*. Аналогично получим, что в тетраэдре все три пары противоположных (скрещивающихся) ребер попарно равны. Таким образом, все грани представляют собой равные треугольники, причем в каждой вершине тетраэдра сходятся три ребра, равные соответствующим сторонам треугольника *АВС,* а плоские углы трехгранного угла равны соответствующим углам этого треугольника. Тогда тупой угол (скажем, угол *В*) больше суммы двух других углов (∠*А* + ∠*С*). Но это противоречит известному свойству – неравенству треугольника для плоских углов трехгранного угла.