Задание № 5

Задача 1

На выставке кошек были представлены кошки сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород. Сиамских кошек было в 2 раза больше, чем ангорских; персидских было на 50% больше, чем сиамских; а сибирских было на 13 меньше, чем персидских. Сколько было на выставке кошек каждой породы, если всего было представлено 77 кошек?

Решение.

Пусть x кошек ангорской породы было представлено на выставке. Тогда сиамских кошек было $2x$, персидских кошек – $2x + 0{,}5\cdot 2x = 3x$, а сибирских – $(3x - 13)$. Всего на выставке было представлено $x + 2x + 3x + (3x - 13)$ кошек, что по условию задачи составляет 77 кошек. Получаем уравнение

$$x + 2x + 3x + (3x - 13) = 77;$$
$$9x - 13 = 77;$$
$$9x = 90;$$
$$x = 10.$$

Таким образом, на выставке было представлено 10 кошек ангорской породы, $2x = 20$ сиамских кошек, $3x = 30$ персидских кошек, $3x - 13 = 17$ сибирских кошек.

Ответ. 10 кошек ангорской породы, 20 сиамских, 30 персидских и 17 сибирских.

Задача 2

Для каждого значения параметра a найдите все значения x, при которых отношение значения выражения $5ax - 50x + 3a$ к значению выражения $5 - 6a - 35ax$ равно 2.

Решение.

Отношение выражения $5ax - 50x + 3a$ к выражению $5 - 6a - 35ax$ можно найти при условии, что $5 - 6a - 35ax \neq 0$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{5ax - 50x + 3a}{5 - 6a - 35ax} = 2.$$

Данное уравнение является уравнением с параметром и равносильно следующей системе

$$\begin{cases} 5ax - 50x + 3a = 2(5 - 6a - 35ax), \\ 5 - 6a - 35ax \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала первое уравнение системы. Оно является линейным уравнением с параметром. Для каждого значения параметра a найдем решения этого уравнения.

$$5ax - 50x + 3a = 10 - 12a - 70ax;$$
$$75ax - 50x = 10 - 15a;$$
$$25x(3a - 2) = -5(3a - 2);$$
$$5x(3a - 2) = -(3a - 2).$$

Возможно два случая.

1) $3a - 2 = 0$, $a = \frac{2}{3}$. При $a = \frac{2}{3}$ уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = 0.$$

Решением уравнения является любое действительное значение x. Подставим $a = \frac{2}{3}$ во второе неравенство системы. Неравенство примет вид

$$-\frac{70}{3}x + 1 \neq 0;$$
$$-\frac{70}{3}x \neq -1;$$
$$x \neq \frac{3}{70}.$$

Таким образом, при $a = \frac{2}{3}$ системе $\begin{cases} 5ax - 50x + 3a = 2(5 - 6a - 35ax), \\ 5 - 6a - 35ax \neq 0. \end{cases}$ удовлетворяет любое действительное значение x, кроме $x \neq \frac{3}{70}$.

2) $3a - 2 \neq 0$, $a \neq \frac{2}{3}$. При $a \neq \frac{2}{3}$ уравнение $5x(3a - 2) = -(3a - 2)$ имеет единственный корень $x = \frac{-(3a-2)}{5(3a-2)}$; $x = -\frac{1}{5}$.

Найдем, при каком значении параметра $x = -\frac{1}{5}$ не будет удовлетворять неравенству $5 - 6a - 35ax \neq 0$.

$$5 - 6a - 35a \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 0;$$
$$5 + a = 0;$$
$$a = -5.$$

Таким образом, при $a = -5$ система $\begin{cases} 5ax - 50x + 3a = 2(5 - 6a - 35ax), \\ 5 - 6a - 35ax \neq 0. \end{cases}$ решений не имеет, при $a \neq -5$ и $a \neq \frac{2}{3}$ система $\begin{cases} 5ax - 50x + 3a = 2(5 - 6a - 35ax), \\ 5 - 6a - 35ax \neq 0. \end{cases}$ имеет единственное решение $x = -\frac{1}{5}$.

Ответ. При $a=\dfrac{2}{3}$ x – любое действительное число, кроме $\dfrac{3}{70}$, то есть $x\neq\dfrac{3}{70}$; при $a=-5$ нет значений x, удовлетворяющих условию задачи; при $a\neq-5$ и $a\neq\dfrac{2}{3}$ $x=-\dfrac{1}{5}$.

Задача 3

Упростите выражение $\dfrac{1}{(a-3)(a-c)}+\dfrac{1}{(3-c)(3-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-3)}$.

Решение.

Преобразуем заданное выражение

$$\frac{1}{(a-3)(a-c)}+\frac{1}{(3-c)(3-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-3)}=\frac{1}{(a-3)(a-c)}+\frac{1}{(a-3)(c-3)}-$$

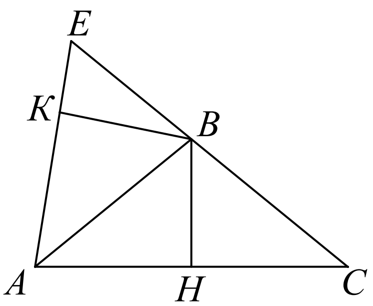
$$-\frac{1}{(a-c)(c-3)}=\frac{c-3+a-c-(a-3)}{(a-3)(c-3)(a-c)}=\frac{c-3+a-c-a+3}{(a-3)(c-3)(a-c)}=\frac{0}{(a-3)(c-3)(a-c)}=0.$$

Ответ. $\dfrac{1}{(a-3)(a-c)}+\dfrac{1}{(3-c)(3-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-3)}=0.$

Задача 4

В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 6, а боковая сторона равна 5. На продолжении стороны CB за точку B отмечена точка E так, что угол CAE равен углу ABE. Найдите высоту треугольника ABE, проведенную из вершины B.

Решение.



Проведем высоту BH треугольника ABC и высоту BK треугольника ABE.

$\angle BAC=\angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABC (по свойству).

$\angle ABE=\angle BAC+\angle C$ как внешний угол треугольника ABC (по свойству).

Так как по условию задачи $\angle ABE=\angle CAE$, то $\angle CAE=\angle BAC+\angle BAE=\angle BAC+\angle C$, следовательно, $\angle BAE=\angle C=\angle BAC$, значит, AB – биссектриса $\angle CAE$ (по определению).

Рассмотрим ΔABH и ΔABK. $\angle AKB=\angle AHB=90°$, так как BK и BH высоты треугольников ABE и ABC соответственно. $\angle BAK=\angle BAH$, так как AB – биссектриса $\angle CAE$; AB – общая гипотенуза, значит, $\Delta ABH=\Delta ABK$ по гипотенузе и острому углу, следовательно, $BH=BK$. (*Замечание. В этом пункте мы* *доказали следующее свойство биссектрисы угла: каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.*)

Так как треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC, BH – высота треугольника ABC, то BH – медиана треугольника ABC (по свойству равнобедренного треугольника), значит, H – середина стороны AC, тогда $AH = 0{,}5AC = 0{,}5 \cdot 6 = 3$.

Найдем BH из треугольника ABC, воспользовавшись теоремой Пифагора. Так как $\angle AHB = 90°$, то $AB^2 = AH^2 + BH^2$, откуда $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 =$ $= 25 - 9 = 16 = 4^2$, значит, $BH = 4$. Тогда $BK = BH = 4$.

Ответ. 4.

Задача 5

Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенных между числами $\frac{131}{48}$ и $\frac{132}{49}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

Решение.

Выделим целую часть у дробей $\frac{131}{48}$ и: $\frac{131}{48} = 2\frac{35}{48}$, $\frac{132}{49} = 2\frac{34}{49}$. Найдем обыкновенную правильную дробь, расположенную между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$, знаменатель которой минимален.

$\frac{1}{2} < \frac{34}{49} < \frac{35}{48} < 1$, следовательно, между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$ нет дроби, знаменатель которой равен 2.

$\frac{2}{3} = \frac{98}{147} < \frac{102}{147} = \frac{34}{49} < \frac{35}{48} < 1$, следовательно, между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$ нет дроби, знаменатель которой равен 3.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} < \frac{34}{49} < \frac{35}{48} < \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, следовательно, между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$ нет дроби, знаменатель которой равен 4.

$\frac{3}{5} = \frac{147}{245} < \frac{170}{245} = \frac{34}{49} < \frac{35}{48} = \frac{175}{240} < \frac{184}{240} = \frac{4}{5}$, следовательно, между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$ нет дроби, знаменатель которой равен 5.

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{98}{147} < \frac{102}{147} = \frac{34}{49} < \frac{35}{48} = \frac{210}{288} < \frac{240}{288} = \frac{5}{6}$, следовательно, между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$ нет дроби, знаменатель которой равен 6.

$\frac{34}{49}=\frac{238}{343}<\frac{245}{343}=\frac{5}{7}=\frac{240}{336}<\frac{245}{336}=\frac{35}{48}$, следовательно, дробь $\frac{5}{7}$ расположена между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$. Так как между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$ нет дробей со знаменателями 2, 3, 4, 5 и 6, то дробь $\frac{5}{7}$ – дробь, знаменатель которой минимален, и которая расположена между дробями $\frac{34}{49}$ и $\frac{35}{48}$. Тогда $2\frac{5}{7}=\frac{19}{7}$ – дробь, знаменатель которой минимален, и которая расположена между дробями $\frac{132}{49}$ и $\frac{131}{48}$.

Ответ. $\frac{19}{7}$.