Задание № 5

Задача 1

Решите в целых числах уравнение $\sqrt{13x+4\sqrt{3}}+\sqrt{13x-4\sqrt{3}}=\sqrt{48y}$.

Решение.

Найдем сначала, при каких целых значения x и y будут существовать $\sqrt{13x+4\sqrt{3}}$, $\sqrt{13x-4\sqrt{3}}$ и $\sqrt{48y}$. $\sqrt{48y}$ существует тогда и только тогда, когда $48y \geq 0$, то есть когда $y \geq 0$. Так как при любых значениях x $13x+4\sqrt{3} > 13x-4\sqrt{3}$, то если существует $\sqrt{13x-4\sqrt{3}}$, будет существовать и $\sqrt{13x+4\sqrt{3}}$. $\sqrt{13x-4\sqrt{3}}$ существует тогда и только тогда, когда $13x-4\sqrt{3}\geq 0$, $13x \geq 4\sqrt{3}$, $x \geq \frac{4\sqrt{3}}{13}=\sqrt{\frac{48}{169}}$; а учитывая, что $0<\sqrt{\frac{48}{169}}<1$, а x – число целое, получаем, что $x \geq 1$. Таким образом, $\sqrt{13x+4\sqrt{3}}$, $\sqrt{13x-4\sqrt{3}}$ и $\sqrt{48y}$ для целых x и y существуют тогда и только тогда, когда x целое положительное число (то есть натуральное), а y целое неотрицательное число.

Так как при натуральных x и целых неотрицательных y левая и правая части уравнения $\sqrt{3x+2\sqrt{2}}+\sqrt{3x-2\sqrt{2}}=\sqrt{8y}$ являются неотрицательными, то возведем обе части уравнения в квадрат. Получим

$$\left(\sqrt{13x+4\sqrt{3}}+\sqrt{13x-4\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{48y}\right)^2;$$

$$13x+4\sqrt{3}+2\sqrt{13x+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{13x-4\sqrt{3}}+13x-4\sqrt{3}=48y;$$

$$26x+2\sqrt{\left(13x+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(13x-4\sqrt{3}\right)}=48y;$$

$$26x+2\sqrt{169x^2-48}=48y; \quad |:2$$

$$\sqrt{169x^2-48}=24y-13x.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат, учитывая, что $24y-13x \geq 0$. Получим систему

$$\begin{cases}169x^2-48=(24y-13x)^2,\\ 24y-13x\geq 0.\end{cases}$$

Решим в целых числах первое уравнение системы.

$$169x^2-48=576y^2-26\cdot 24xy+169x^2;$$

$$576y^2-26\cdot 24xy=-48; \quad |:(-48)$$

$$13xy-12y^2=1;$$

$$y(13x-12y)=1.$$

Так как x и y – числа целые, то $13x - 12y$ – целое, следовательно, учитывая, что y является неотрицательным целым числом, оба множителя равны 1, то есть получаем

$$\begin{cases} y = 1, \\ 13x - 12y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1, \\ x = 1. \end{cases}$$

При $x = 1$, $y = 1$ $24y - 13x = 24 - 13 = 11 \geq 0$ и выполняется условие, что x натуральное число, а y целое неотрицательное число, следовательно, $x = 1$, $y = 1$ – решение уравнения $\sqrt{13x + 4\sqrt{3}} + \sqrt{13x - 4\sqrt{3}} = \sqrt{48y}$ в целых числах.

Ответ. $x = 1$, $y = 1$.

Задача 2

Для каждого значения параметра a найдите все значения x, при которых значение выражения $\dfrac{x^2+5}{(x-2)^2}$ будет равно $\dfrac{a^2+5}{(a-2)^2}$.

Решение.

При $a = 2$ задача не имеет смысла, то есть $a = 2$ не является допустимым значением параметра.

Рассмотрим допустимые значения параметра, то есть $a \neq 2$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{x^2+5}{(x-2)^2} = \frac{a^2+5}{(a-2)^2};$$

$$\frac{x^2+5}{(x-2)^2} - \frac{a^2+5}{(a-2)^2} = 0;$$

$$\frac{(x^2+5)(a-2)^2 - (a^2+5)(x-2)^2}{(x-2)^2(a-2)^2} = 0;$$

$$\frac{(x^2+5)(a^2-4a+4) - (a^2+5)(x^2-4x+4)}{(x-2)^2(a-2)^2} = 0;$$

$$\frac{x^2a^2 + 5a^2 - 4x^2a - 20a + 4x^2 + 20 - a^2x^2 - 5x^2 + 4xa^2 + 20x - 4a^2 - 20}{(x-2)^2(a-2)^2} = 0;$$

$$\frac{-x^2(4a+1) + 4x(a^2+5) + a^2 - 20a}{(x-2)^2(a-2)^2} = 0;$$

$$\frac{x^2(4a+1) - 4x(a^2+5) - a^2 + 20a}{(x-2)^2(a-2)^2} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2(4a+1) - 4x(a^2+5) - a^2 + 20a = 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы $x^2(4a+1)-4x(a^2+5)-a^2+20a=0$. Оно является квадратным уравнением с параметром.
Рассмотрим значения параметра, при которых качественно меняется уравнение (контрольные значения параметра).

1) $4a + 1 = 0$, $a = -\frac{1}{4}$. При $a = -\frac{1}{4}$ уравнение примет вид

$$-4x\left(\frac{1}{16}+5\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+20\right)=0;$$

$$-\frac{81}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{81}{4}=0;$$

$$x=-\frac{1}{4}.$$

Так как $-\frac{1}{4}\neq 2$, то при $a=-\frac{1}{4}$ уравнение $\frac{x^2+5}{(x-2)^2}=\frac{a^2+5}{(a-2)^2}$ имеет единственный корень $x=-\frac{1}{4}$.

2) $a\neq -\frac{1}{4}$. Преобразуем квадратное уравнение.

$$x^2(4a+1)-4x(a^2+5)-a^2+20a=0;$$

$$4x^2a+x^2-4xa^2-20x-a^2+20a=0;$$

$$(x^2-a^2)+4xa(x-a)-20(x-a)=0;$$

$$(x-a)(x+a+4xa-20)=0;$$

$$(x-a)(x(1+4a)+a-20)=0;$$

$$x=a \text{ или } x=\frac{20-a}{1+4a}.$$

2.1) Найдем значение параметра a, при котором корни уравнения $x=a$ и $x=\frac{20-a}{1+4a}$ будут совпадать.

$$a=\frac{20-a}{1+4a};$$

$$a(1 + 4a) = 20 - a;$$

$$4a^2 + 2a - 20 = 0;$$

$$2a^2 + a - 10 = 0;$$

$$2a^2 + 5a - 4a - 10 = 0;$$

$$a(2a + 5) - 2(2a + 5) = 0;$$

$$(2a + 5)(a - 2) = 0;$$

$$a = -2{,}5 \text{ или } a = 2.$$

Так как $a=2$ – недопустимое значение параметра, то квадратное уравнение $x^2(4a+1)-4x(a^2+5)-a^2+20a=0$ имеет единственный корень $x=a$ при

$a = –2,5$. А в силу того, что $x = a = -2,5 \neq 4$, то при $a = –2,5$ уравнение $\frac{x^2+5}{(x-2)^2} = \frac{a^2+5}{(a-2)^2}$ имеет единственный корень $x = a = –2,5$.

2.2) При $a \neq 2$, $a \neq -\frac{1}{4}$ и $a \neq -2,5$ квадратное уравнение $x^2(4a+1) - 4x(a^2+5) - a^2 + 20a = 0$ имеет два различных действительных корня $x = a$, $x = \frac{20-a}{1+4a}$. Выясним, при каких значениях параметра один из этих корней не будет удовлетворять условию $x \neq 2$. Так как допустимыми значениями параметра являются $a \neq 2$, то для всех рассматриваемых значений параметра корень $x = a$ удовлетворяет условию $x \neq 2$. Найдем, при каких значениях параметра корень $x = \frac{20-a}{1+4a}$ совпадет с 2.

$$\frac{20-a}{1+4a} = 2;$$
$$20 – a = 2(1 + 4a);$$
$$8a + a = 20 – 2;$$
$$9a = 18;$$
$$a = 2.$$

Так как допустимыми значениями параметра являются $a \neq 2$, то для всех рассматриваемых значений параметра корень $x = \frac{20-a}{1+4a}$ удовлетворяет условию $x \neq 2$.

Таким образом, при $a \neq 2$, $a \neq -\frac{1}{4}$ и $a \neq -2,5$ уравнение $\frac{x^2+5}{(x-2)^2} = \frac{a^2+5}{(a-2)^2}$ имеет два различных действительных корня $x = a$, $x = \frac{20-a}{1+4a}$.

Ответ. При $a = 2$ задача не имеет смысла; при $a = -\frac{1}{4}$ или $a = -2,5$ $x = a$; при $a \neq 2$, $a \neq -\frac{1}{4}$ и $a \neq -2,5$ $x = a$, $x = \frac{20-a}{1+4a}$.

Задача 3

На графике функции $y = -|2x+5|$ найдите точку, ближайшую к точке $A(–6; 0)$.

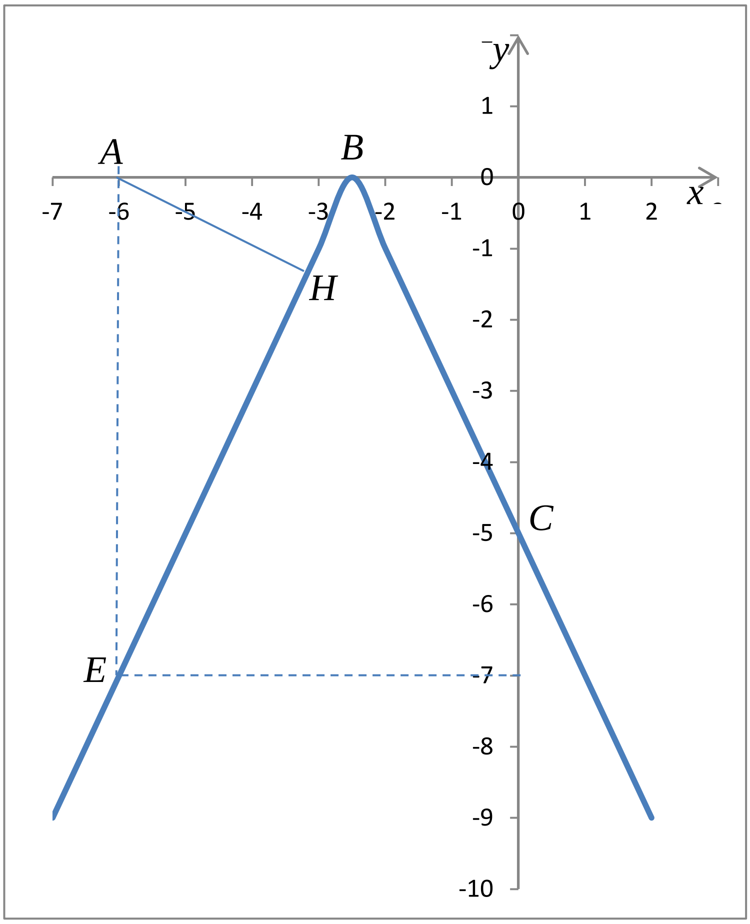
Решение.

Построим график функции $y = -|2x+5|$. Раскроем модуль, получим

$$y = \begin{cases} -2x-5 & \textit{при}\ 2x+5 \geq 0, \\ 2x+5 & \textit{при}\ 2x+5 < 0; \end{cases}$$

$$y=\begin{cases}-2x-5 & при\ \ x\ge -2{,}5,\\ 2x+5 & при\ \ x< -2{,}5.\end{cases}$$

Обозначим точки графика функции $B(–2{,}5; 0)$, $C(0; –5)$, $E(–6; –7)$. Так как $\angle ABC$ тупой, то ближайшей к точке A точкой луча BC является точка B, так как для любой точки M луча BC, $M\ne B$, в треугольнике ABM $\angle ABM > \angle AMB$, следовательно, $AM > AB$. Так как $\angle ABE$ острый, то ближайшей к точке A точкой луча BE является основание перпендикуляра H, опущенного из точки A на прямую BE. Так как AB – наклонная к прямой BE, AH – перпендикуляр к прямой BE, то $AH < AB$, следовательно, ближайшей к точке A точкой графика функции $y=|5x-3|$ является точка H.



Координаты точки H будем искать как координаты точки пересечения прямых BE и AH. Прямая BE задается уравнением $y = 2x + 5$. Угловой коэффициент прямой BE $k_{BE} = 2$. Найдем уравнение прямой AH. Так как прямые BE и AH перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_{BE}\cdot k_{AH} = –1$, откуда $k_{AH}=-\dfrac{1}{k_{BE}}=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5$. Тогда уравнение прямой AH имеет вид $y = –0{,}5x + b$. Значение b найдем из условия, что точка $A(–6; 0)$ принадлежит прямой AH, следовательно, координаты точки A удовлетворяют уравнению прямой AH. Тогда получаем

$$0 = –0{,}5\cdot(–6) + b,$$
$$b = –3.$$

Тогда уравнение прямой AH имеет вид $y = –0{,}5x – 3$. Координаты точки H являются решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases}y=2x+5,\\ y=-0{,}5x-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x+5,\\ 2x+5=-0{,}5x-3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2{,}5x=-8,\\ y=2x+5;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{16}{5}, \\ y = -\dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

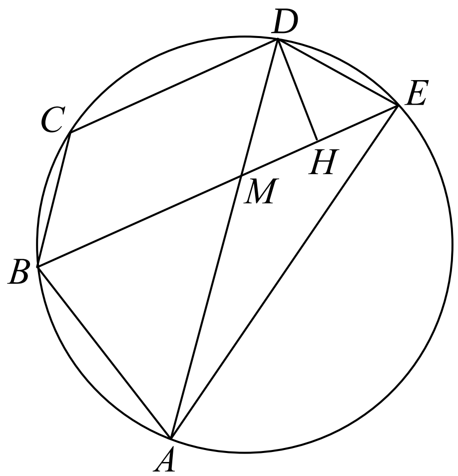
Получили, что искомая точка H имеет координаты $(-3{,}2;\ -1{,}4)$, то есть ближайшая к точке $A(-6;\ 0)$ точка графика функции $y = -|2x+5|$ имеет координаты $(-3{,}2;\ -1{,}4)$.

Ответ. $(-3{,}2;\ -1{,}4)$.

Задача 4

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, если известно, что $DE = 4$, $AD = 7$ и $BE = 8$.

Решение.



Так как $BCDM$ — параллелограмм, то $BC \parallel DM$, $BM \parallel CD$ (по определению), $BC = DM$, $BM = CD$ (по свойству).

Рассмотрим четырехугольник $BCDE$. $BE \parallel CD$, $BE = BM + ME > CD$, значит, $BCDE$ – трапеция. Так как $BCDE$ вписана в окружность, то $BCDE$ – равнобедренная трапеция (по признаку), то есть $BC = DE$. Тогда $BC = DM = DE = 4$. Аналогично, $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AB = CD = BM$.

По условию задачи $AD = 7$, $DM = 4$, тогда $AM = AD - DM = 7 - 4 = 3$.

Пусть $BM = x$, тогда $ME = BE - BM = 8 - x$. По свойству пересекающихся хорд $AM \cdot MD = BM \cdot ME$, $3 \cdot 4 = x(8 - x)$, $x^2 - 8x + 12 = 0$, $x^2 - 6x - 2x + 12 = 0$, $x(x - 6) - 2(x - 6) = 0$, $(x - 6)(x - 2) = 0$, $x = 2$ или $x = 6$. Таким образом, возможно два случая: $BM = 2$ или $BM = 6$.

<u>1 случай.</u> $BM = 2$, тогда $ME = BE - BM = 8 - 2 = 6$, $AB = BM = CD = 2$.

Рассмотрим треугольник DME. $DM = DE$, значит, треугольник DME – равнобедренный с основанием ME (по определению), следовательно, $\angle DEM = \angle DME$ (по свойству). Проведем высоту DH в треугольнике DME. По свойству равнобедренного треугольника DH – медиана треугольника DME, значит, H – середина ME, $EH = 0{,}5ME = 0{,}5 \cdot 6 = 3$.

Рассмотрим ΔDEH, $\angle DHE = 90°$. По теореме Пифагора $DE^2 = DH^2 + HE^2$, откуда $DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

$$S_{BCDE} = \frac{CD + BE}{2} \cdot DH = \frac{2+8}{2} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7},\ S_{DME} = \frac{1}{2} ME \cdot DH = \frac{6 \cdot \sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}.$$

Рассмотрим треугольники ABM и EDM. $\angle BMA = \angle DME$ как вертикальные, $\angle ABM = \angle EDM$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу, значит,

$\Delta ABM \sim \Delta EDM$ по двум углам, следовательно, $\dfrac{S_{ABM}}{S_{EDM}} = \left(\dfrac{BM}{DM}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, откуда $S_{ABM} = \dfrac{1}{4} S_{EDM} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}$.

Треугольники ABM и ABE имеют общую высоту, проведенную из вершины A, следовательно, $\dfrac{S_{ABE}}{S_{ABM}} = \dfrac{BE}{BM} = \dfrac{8}{2} = 4$, откуда $S_{ABE} = 4S_{ABM} = 4 \cdot \dfrac{3\sqrt{7}}{4} = 3\sqrt{7}$.

$S_{ABCDE} = S_{BCDE} + S_{ABE} = 5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$.

2 случай. $BM = 6$, тогда $ME = BE - BM = 8 - 6 = 2$, $AB = BM = CD = 6$. Повторяя рассуждения первого случая, получаем $EH = 0{,}5ME = 0{,}5 \cdot 2 = 1$, $DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$, $S_{BCDE} = \dfrac{CD+BE}{2} \cdot DH = \dfrac{6+8}{2} \cdot \sqrt{15} = 7\sqrt{15}$, $S_{DME} = \dfrac{1}{2} ME \cdot DH = \dfrac{2 \cdot \sqrt{15}}{2} = \sqrt{15}$, $\dfrac{S_{ABM}}{S_{EDM}} = \left(\dfrac{BM}{DM}\right)^2 = \left(\dfrac{6}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$, $S_{ABM} = \dfrac{9}{4} S_{EDM} = \dfrac{9\sqrt{15}}{4}$, $\dfrac{S_{ABE}}{S_{ABM}} = \dfrac{BE}{BM} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$, $S_{ABE} = \dfrac{4}{3} S_{ABM} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{9\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$, $S_{ABCDE} = S_{BCDE} + S_{ABE} = 7\sqrt{15} + 3\sqrt{15} = 10\sqrt{15}$.

Ответ. $8\sqrt{7}$ или $10\sqrt{15}$.

Задача 5

Губернатор Нижегородской области решил организовать автобусное движение между двумя деревнями. Автобусы-экспрессы будут следовать из одной деревни в другую без остановок круглосуточно с интервалом ровно 15 минут, останавливаться в конечном пункте на какое-то время и отправляться обратно, тратя на дорогу в одну сторону ровно 45 минут. При этом на конечных остановках не должно находиться более одного автобуса одновременно. Сколько автобусов потребуется купить губернатору?

Решение.

Пусть время стоянки автобуса на конечном пункте равно x минут. Так как на конечных остановках не должно находиться более одного автобуса одновременно, и интервал движения автобусов равен 15 минут, то $0 < x < 15$. Тогда на один круг автобус затрачивает $2 \cdot (45 + x) = 90 + 2x$ (минут), $90 < 90 + 2x < 120$.

Обозначим за n – количество автобусов, которое потребуется купить губернатору для обеспечения движения автобусов с интервалом 15 минут. Тогда $15n = 90 + 2x$. Получаем, $90 < 15n < 120$, $6 < n < 8$. Так как n – число целое, то $n = 7$.

Ответ. 7 автобусов.