ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2024-2025 учебный год)

<u>Задание 5</u>
Задача 1

Решите ребус:

```
* * 9 * 2 * | * * *
  * * *     |------
-----------   * 2 *
  * * * *
  * * * *
---------
      * * *
      * 8 *
      -----
          0
```

Решение.

Пусть x – делитель, y- делимое.

При умножении делителя на два получается четырехзначное число, следовательно, трехзначное число можно получить только при умножении x на единицу - первая и третья цифры частного – 1. Таким образом, частное – 121. Наименьшее возможное значение числа y – 109020, то есть

$$121x \geq 109020, x > 900,$$

первая цифра делителя – 9, вторая цифра делителя, как видно из последнего действия, – 8. Последняя цифра числа $2x$ равна 4 $(= 12 - 8)$, поэтому x заканчивается на 2 или на 7.

```
1 * 9 * 2 * | 9 8 *
  * 8 *     |------
-----------   1 2 1
  * * * 2
  * * * 4
---------
      * 8 *
      * 8 *
      -----
          0
```

Таким образом, $x = 982$или $x = 987$. В первом случае $y = 121x = 118822$, не подходит (третья цифра не 9), во втором случае $y = 121x = 119427$.

Делим число y на число x столбиком, восстанавливаем остальные цифры.

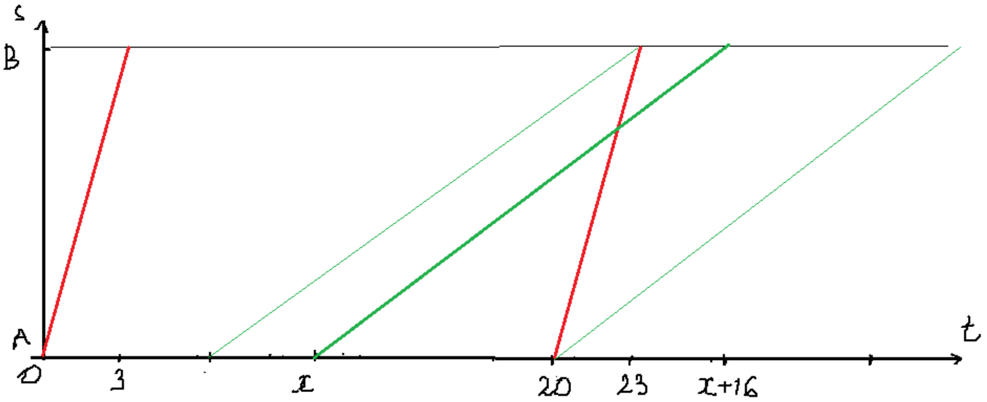
Ответ:

```
1 1 9 4 2 7 | 9 8 7
  9 8 7     |------
-----------   1 2 1
  2 0 7 2
  1 9 7 4
---------
      9 8 7
      9 8 7
      -----
          0
```

Задача 2

Дорога от площади Лядова до университета обычно занимает у Васи 16 минут, автобусы проезжают это расстояние за три минуты. Найдите вероятность того, что когда Вася идет в университет, его догонит автобус номер 12, если интервал движения автобусов на этом маршруте равен 20 минут.

Решение.



Пусть очередной автобус отъехал от площади за x минут до того, как Вася начинает свой путь, $0 < x < 20$. Отложим графики движения автобусов (красные линии) и Васи (зеленые линии). Графики пересекаются, если

$$x \geq 23 - 16 = 7.$$

Поэтому вероятность того, что автобус догонит Васю, равна

$$p = \frac{20 - 7}{20} = 0{,}65.$$

Ответ: 0,65.

Задача 3

Вася запланировал решить за февраль 2025 года 55 задач по геометрии. Каждый следующий день он решал на три задачи больше, чем предыдущий, и выполнил свой план досрочно за целое число дней, не меньшее 3 и не большее 10. После этого Вася взял другой задачник и каждый день кроме 14 и 23 февраля решал по 11 задач. Определите, сколько задач Вася решил первого февраля и на сколько процентов он перевыполнил свой изначальный план.

Решение. Пусть в первый день Вася решил x задач и выполнил план за n дней. Тогда

$$\frac{2x + 3(n-1)}{2} n = 55, \quad 3 \leq n \leq 10,$$
$$(2x - 3 + 3n)n = 110.$$

Число n должно быть делителем числа 110, поэтому $n = 5$ или $n = 10$.
Если $n = 10$, то $2x - 3 + 3n = 11$, число слева заведомо больше, чем 11.
Если $n = 5$, то $2x - 3 + 15 = 22$, $x = 5$.
По 11 задач Вася решал $28 - 5 - 2 = 21$ день, то есть всего он решил

$$21 \cdot 11 + 55 = 286$$

задач. Число 286 составляет 520% от 55 $(286/55 = 5{,}2)$, то есть первоначальный план перевыполнен на 420%.

Ответ: 5 задач, на 420%.

Задача 4

Найдите значение параметра a, при котором уравнение

$$x^4 - 10ax^2 + a^4 = 0$$

имеет 4 корня, которые образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Обозначим $t = x^2$. Пусть t_1, t_2 - корни квадратного уравнения

$$t^2 - 10at + a^4 = 0.$$

По теореме Виета,

$$t_1 + t_2 = 10a, t_1 t_2 = a^4.$$

При $a > 0$корни положительные (по теореме Виета) и исходное уравнение имеет четыре корня

$$-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}.$$

Пусть, без ограничения общности, $t_1 \le t_2$. Тогда прогрессия имеет вид

$$-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$$

По определению арифметической прогрессии

$$\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1}.$$

Таким образом,

$$t_2 = 9t_1,$$
$$10t_1 = 10a, 9t_1^2 = a^4,$$
$$t_1 = a, 9 = a^2, a = 3.$$

При $a = 3$уравнение имеет вид

$$x^4 - 30x^2 + 81 = 0,$$

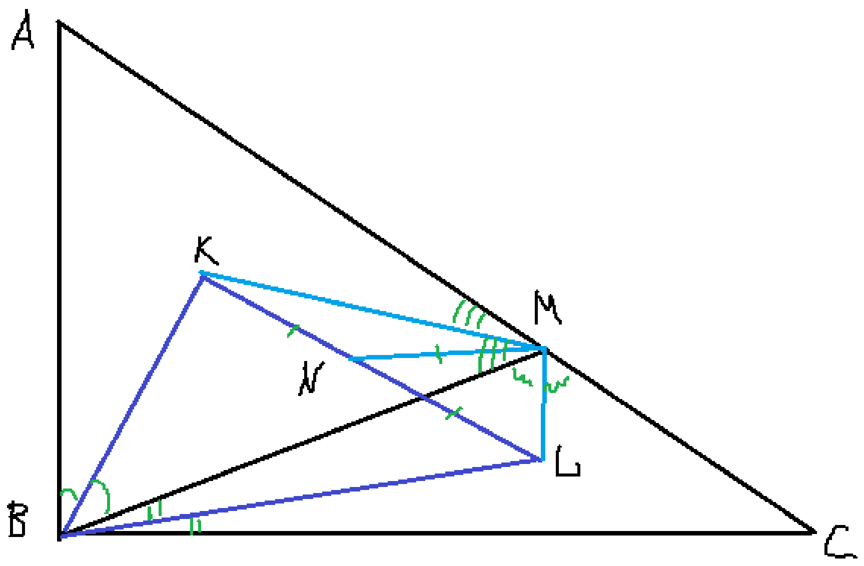
его корни - $\pm\sqrt{3}, \pm 3\sqrt{3}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $2\sqrt{3}$.

Ответ: $a = 3$.

Задача 5

Точка M лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC, точки K и L - центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBM соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BKL, если расстояние от точки Mдо середины KL равно $7\sqrt{2}$.

Решение.



Точка K – точка пересечения биссектрис треугольника ABM, точка L – точка пересечения биссектрис треугольника CBM. Поэтому:

$$\angle AMK = \angle KMB, \angle BML = \angle LMC, \angle KML = \angle KMB + \angle BML = 0{,}5\angle AMC = 90^{\circ},$$

$$\angle AbK = \angle KBM, \angle MBL = \angle LBC, \angle KBL = \angle KBM + \angle MBL = 0{,}5\angle ABC = 45^{\circ}.$$

Пусть N – середина KL. Тогда N – центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника KML, $KL = MN = 14\sqrt{2}$.

В треугольнике BKL по теореме синусов находим

$$2R = \frac{KL}{\sin 45^0} = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = 28, \quad R = 14.$$

Ответ: 14.