ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2025-2026 учебный год)

Задание 1

Задача 1

Золушка нашла 8 одинаковых по виду орехов, среди которых находится волшебный. Все обычные орехи имеют одинаковый вес, а волшебный немного от них по весу отличается. Помогите Золушке найти волшебный орех не более чем за три взвешивания на чашечных весах (без гирь).

Решение.

Взвешивание 1. Положим на чаши весов по два ореха. Если какая-то чаша перевешивает, значит волшебный орех находится среди взвешиваемых орехов. Если весы находятся в равновесии, то все орехи на весах – обычные, и волшебный орех находится среди четырех ещё не взвешенных.
Взвешивание 2. Есть четыре ореха, среди которых один – волшебный. Кладём на весы по одному ореху из подозрительных. Если какая-то чаша перевешивает, то волшебный орех находится на весах. Если весы находятся в равновесии, то все орехи на весах – обычные, и волшебный орех – один из двух оставшихся.
Взвешивание 3. Есть два ореха, среди которых один – волшебный, и шесть обычных. На одну чашу весов положим подозрительный орех, на вторую – обычный. Если какая-то чаша перевешивает, то взвешиваемый подозрительный орех – волшебный. Если весы находятся в равновесии – волшебным является второй подозрительный орех.

Задача 2

Две группы рождественских эльфов получили у Санта-Клауса одинаковое задание по подготовке подарков. Первая группа закончила задание на день раньше, чем вторая, а если бы в ней было на пять эльфов больше, то она могла бы закончить задание на четыре дня раньше. Определите количество эльфов в каждой группе, если производительность у них одинаковая.

Решение

Пусть в первой группе – n эльфов, во второй – $n-k$эльфов и первая группа выполнила задание заt дней. Тогда справедливы равенства

$$tn=(t+1)(n-k)=(t-4)(n+5).$$

Получаем отсюда:

$$4n=5(t-4),$$
$$n=k(t+1).$$

Таким образом,

$$4k(t+1)=5(t-4),$$
$$4(k+5)=t(5-4k).$$

Из последнего равенства следует, что $k=1$(число k натуральное, $5-4k$>0). Значит $t=24, n=25$.
Если понимать условие так, что первая группа эльфов, увеличенная на 5, закончила бы задание на четыре дня раньше, чем вторая, то аналогично получаются равенства

$$tn=(t+1)(n-k)=(t-3)(n+5),$$
$$3n=5(t-3)=3k(t+1),$$
$$3(k+5)=t(5-3k).$$

Следовательно, $k=1$, $t=9$, $n=10$.
Ответ:25 и 24или 10 и 9.

Задача 3

Может ли квадратный трехчлен иметь рациональные корни, если все его коэффициенты – целые нечетные числа?

Решение

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$ax^2+bx+c,$$

где a, b, c – целые нечетные числа. Предположим, число p/q, где p – целое, а q – натуральное число, корень этого трехчлена, то есть

$$a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0,$$

$$ap^2+bpq+cq^2=0.$$

Получаем отсюда, что число aделится на q, то есть $a=a_1q$, причем числа a_1и q– нечетные (иначе aбыло бы четным), число cделится на p, то есть $c=c_1p$, причем числа c_1и p–нечетные.Подставим в уравнение:

$$a_1p^2q+bpq+c_1q^2p=0,$$

$$a_1p+b+c_1q=0.$$

В последнем равенстве сумма трех целых нечетных чисел равна четному числу 0, чего быть не может.

Ответ: не может.

Задача 4

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2+2(a-2)x+a^2-4a)^2+(a+5)(x^2+2(a-2)x+a^2-4a)-a^2+8a+2=0$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

Решение

Обозначим

$$t=x^2+2(a-2)x+a^2-4a.$$

Тогда уравнение примет вид

$$t^2+(a+5)t-a^2+8a+2=0. \qquad (1)$$

Каждому корню t уравнения (1) могут соответствовать 0, 1 или 2 корня уравнения

$$x^2+2(a-2)x+a^2-4a-t=0, \qquad (2)$$

причем разным корням уравнения (1) соответствуют разные корни уравнения (2).

Дискриминант уравнения (1) равен

$$D_1=(a+5)^2-4(-a^2+8a+2)=5a^2-22a+17.$$

Решая уравнение $5a^2-22a+17=0$находим, что уравнение (1) имеет два различных корня при $a<1$ и при $a>17/5$. Если $a=1$, уравнение (1) имеет единственный корень $t=-3$; если $a=17/5$, уравнение (1) имеет единственный корень $t=-21/5$.

Уравнение (2) можно записать в виде

$$(x+a-2)^2=t+4,$$

то есть $t=-4$соответствует один корень уравнения (2), значению $t>-4$соответствуют два корня уравнения (2), при $t<-4$ уравнение (2) корней не имеет.

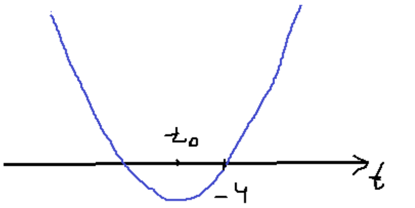
Исходное уравнение имеет единственное решение в следующих случаях:

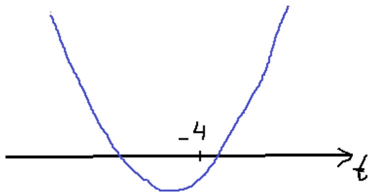
- уравнение (1) имеет единственный корень, ему соответствует единственный корень уравнения (2);
- уравнение (1) имеет два корня, одному из них соответствует единственный корень уравнения (2), а при втором уравнение (2) не имеет корней.

В первом случае единственным корнем уравнения (1) должен быть $t = -4$, чего не происходит ни при каких a. Во втором случае один корень уравнения (1) должен быть равен -4, а второй быть меньше, чем -4. Таким образом, выполняются условия:

$$16 - 4(a+5) - a^2 + 8a + 2 = 0,$$
$$t_0 = -\frac{(a+5)}{2} < -4;$$

то есть $a^2 - 4a + 2 = 0$, $a > 3$, следовательно, $a = 2 + \sqrt{2}$, единственное решение $x = -\sqrt{2}$.





Исходное уравнение имеет ровно два различных решения в следующих случаях:
- уравнение (1) имеет единственный корень, ему соответствуют два корня уравнения (2);
- уравнение (1) имеет два корня, каждому из которых соответствует единственный корень уравнения (2);
- уравнение (1) имеет два корня, одному из них соответствуют два корня уравнения (2), а при втором уравнение (2) не имеет корней.

В первом случае $a = 1$ (тогда $t = -3$, решения $x = 0$и $x = 2$).Второй случай не реализуется, так как уравнение (2) имеет единственный корень только при одном значении t.

В третьем случае один корень уравнения (1) должен быть больше, чем -4, а второй – меньше, чем -4. Таким образом, выполняется условие

$$16 - 4(a+5) - a^2 + 8a + 2 < 0,$$

то есть $a^2 - 4a + 2 > 0$, $a > 2 + \sqrt{2}$ или $a < 2 - \sqrt{2}$.

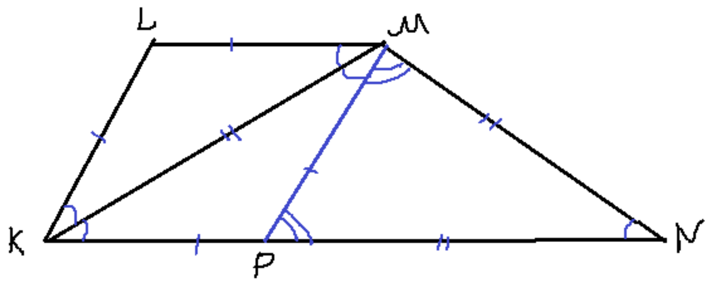
Ответ:а)$a = 2 + \sqrt{2}$;
б)$a = 1, a > 2 + \sqrt{2}$, $a < 2 - \sqrt{2}$.

Задача 5

Найдите углы трапеции $KLMN$ (KN и LM основания), если $KL = LM$, $KM = MN$ и $LM + MN = KN$.

Решение

Поставим на стороне KN точку Pтак, что $KP = LM$. Тогда $PN = MN$. Так как KP и LMравны и параллельны, $KLMP$– параллелограмм. Прямая MP параллельна KLи $MP = KL$, то есть $KLMP$ – ромб.



Треугольник KLM – равнобедренный по условию. Пусть $\angle LKM = \angle LMK = \alpha$. Тогда $\angle MKP = \alpha$и $\angle KMP = \alpha$.

Треугольник KMN – равнобедренный по условию, поэтому $\angle KNM = \alpha$.

Треугольник MNP – равнобедренный по построению, $\angle MPN = \angle PMN = 2\alpha$как смежный в треугольнике KMP.

Таким образом,

$$180^{\circ} = \angle LMN + \angle KNM = 5\alpha,$$
$$\alpha = 36^{\circ}.$$

Получаем:
$\angle LKN = 2\alpha = 72^{\circ}$, $\angle KLM = 180^{\circ} - 2\alpha = 108^{\circ}$,$\angle LMN = 4\alpha = 144^{\circ}$,$\angle MNK = \alpha = 36^{\circ}$.

Ответ:72°, 108°,144°, 36°.