Задание № 2

Задача 1

Найдите наибольший делитель числа 2025!, имеющий вид $2\cdot10^p$, где p – число натуральное. Ответ обоснуйте. (n! обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно)

Решение.

Так как $10 = 2\cdot5$, то разложение числа $2\cdot10^p$ на простые множители имеет вид: $2\cdot10^p = 2^{p+1}\cdot5^p$. Чтобы найти наибольший делитель числа 2025!, имеющий вид $2\cdot10^p$, где p – число натуральное, необходимо найти наименьший из показателей степени, в котором входят числа 2 и 5 в разложении 2025! на простые множители. Так как в произведении 2025! каждый второй множитель является четным числом, то показатель степени 2 в разложении 2025! на простые множители не меньше 1012.

Найдем показатель степени 5 в разложении на простые множители 2025!. Так как каждое пятое натуральное число кратно 5, то среди произведения 2025! 2025:5 = 405 множителей, кратных 5. Так как $100 = 25\cdot4$, то среди 100 последовательных натуральных чисел ровно 4 кратных 25. В числе 2000 двадцать сотен, а среди чисел от 2001 до 2025 ровно одно число 2025 чисел, кратное 25, поэтому в произведении 2025! ровно $4\cdot20 + 1 = 81$ число, кратное 25. Так как $1000 = 125\cdot8$, то среди 1000 последовательных натуральных чисел ровно 8 кратных 125. В числе 2000 две тысячи, а среди чисел от 2001 до 2025 нет чисел, кратных 125, поэтому в произведении 2025! ровно $8\cdot2 = 16$ чисел, кратных 125. Кроме того, в произведении 2025! есть множители 625, 1250 и 1875, то есть три множителя, кратных 625. Поэтому, учитывая, что $25 = 5^2$, $125 = 5^3$, $625 = 5^4$, $3125 = 5^5 > 2025$ показатель степени числа 5 в разложении 2020! на простые множители равен $405 + 81 + 16 + 3 = 505$.

Таким образом, получаем, что $2025! = 2^n\cdot5^{505}\cdot x$, где $n \geq 1012$, а множитель x взаимно прост с числами 2 и 5, то есть $2025! = 10^{505}\cdot2^{n-505}\cdot x$, следовательно, наибольший делитель числа 2025!, имеющий вид $2\cdot10^p$, где p – число натуральное, равен $2\cdot10^{505}$, так как $n - 505 > 0$ в силу того, что $n \geq 1012$.

Ответ. $2\cdot10^{505}$.

Задача 2

Решите уравнение

$$||4x+7|-13|-29=\frac{||4x+7|-13|-41}{3}.$$

Решение.

$$||4x+7|-13|-29=\frac{||4x+7|-13|-41}{3}; \qquad |\cdot 3$$

$$3\cdot||4x+7|-13|-87=||4x+7|-13|-41;$$

$$2\cdot||4x+7|-13|=46;$$

$$||4x+7|-13|=23;$$

$|4x+7|-13=23$ или $|4x+7|-13=-23$;

$|4x+7|=36$; $\qquad |4x+7|=-10$;

$4x+7=36$ или $4x+7=-36$; $\qquad$ уравнение не имеет решений,

$4x=29$; $\qquad 4x=-43$; $\qquad$ так как $|4x+7|\ge 0$.

$x=7{,}25$. $\qquad x=-10{,}75$.

Ответ. 7,25; –10,75.

Задача 3

Докажите, что при любых значениях c справедливо следующее неравенство: $\frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}\ge 5$. Укажите значения c, при которых справедливо равенство.

Решение.

Рассмотрим разность $\frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}-5$.

$$\frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}-5=\frac{2c^2+c^4+36-20-10c^2}{2(2+c^2)}=\frac{c^4-8c^2+16}{2(2+c^2)}=\frac{\left(c^2-4\right)^2}{2(2+c^2)}.$$

Так как для любого действительного числа c $c^2\ge 0$ и $(c^2-4)^2\ge 0$, то $2(2+c^2)>0$, следовательно, $\frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}-5=\frac{\left(c^2-4\right)^2}{2(2+c^2)}\ge 0$, значит, $\frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}\ge 5$, что и требовалось доказать.

$$\frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}=5 \Leftrightarrow \frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}-5=\frac{\left(c^2-4\right)^2}{2(2+c^2)}=0 \Leftrightarrow \left(c^2-4\right)^2=0 \Leftrightarrow c^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow c = 2$ или $c = -2$.

Ответ. Равенство $\frac{c^2}{2}+\frac{18}{2+c^2}=5$ справедливо при $c = 2$ или $c = -2$.

Задача 4

Дед Мороз подготавливает сладкие подарки к Новому году. В первый он разложил в подарки 1454 конфеты и упаковал их в коробки двух видов: большие и маленькие. Известно, что маленькая коробка вмещает 5 конфет. Во второй день он разложил в такие же коробки 1467 конфет. При этом в первый день было подготовлено столько маленьких коробок с конфетами, сколько больших во второй, а во второй день — столько маленьких коробок с конфетами, сколько больших в первый. Сколько маленьких коробок было использовано в 1-й день и сколько подарков было подготовлено Дедом Морозом за два дня, если в каждой большой коробке одинаковое количество конфет?

Решение.

Пусть в первый день Дед Мороз подготовил x подарков в маленьких коробках и y подарков в больших коробках, и пусть большая коробка вмещает a конфет, причем x, y и a – числа натуральные, $a > 5$. Тогда в первый день на изготовление подарков Дед Мороз израсходовал $5x + ay$ конфет, что по условию задачи равно 1454 конфеты. Во второй день Дед Мороз подготовил y подарков в маленьких коробках и x подарков в больших коробках. На изготовление подарков во второй день Дед Мороз израсходовал $5y + ax$ конфет, что по условию задачи равно 1467 конфет.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x+ay=1454, \\ 5y+ax=1467. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы первое. Получим

$$5y + ax - 5x - ay = 1467 - 1454;$$

$$a(x - y) - 5(x - y) = 13;$$

$$(a - 5)(x - y) = 13.$$

Так как x, y и a – числа натуральные, $a > 5$, то $a - 5$ – число натуральное, а $x - y$ – число целое, но произведение $a - 5$ и $x - y$ положительное, поэтому $x - y$ – число положительное, т.е. натуральное.

Число 13 – простое, поэтому в виде произведения двух натуральных чисел представляется двумя способами: 13 = 1·13 = 13·1. Возможно два случая.

<u>1 случай.</u> $a - 5 = 1$, $x - y = 13$, тогда $a = 6$, $x = 13 + y$. Подставим a и x в первое уравнение системы. Получим

$$5(13 + y) + 6y = 1454;$$
$$11y = 1389;$$
$$y = 126\frac{3}{11}.$$

Но число $126\frac{3}{11}$ не является натуральным, а y – число натуральное, следовательно, этот случай не возможен.

<u>2 случай.</u> $a - 5 = 13$, $x - y = 1$, тогда $a = 18$, $x = 1 + y$. Подставим a и x в первое уравнение системы. Получим

$$5(1 + y) + 18y = 1454;$$
$$23y = 1449;$$
$$y = 63.$$

Так как 63 – число натуральное, то получаем, что в первый день Дед Мороз подготовил 63 подарка в больших коробках и 1 + 63 = 64 подарка в маленьких коробках. Всего за два дня Дед Мороз подготовил $2(x + y) = 2(64 + 63) = 2·127 = 254$ подарка.

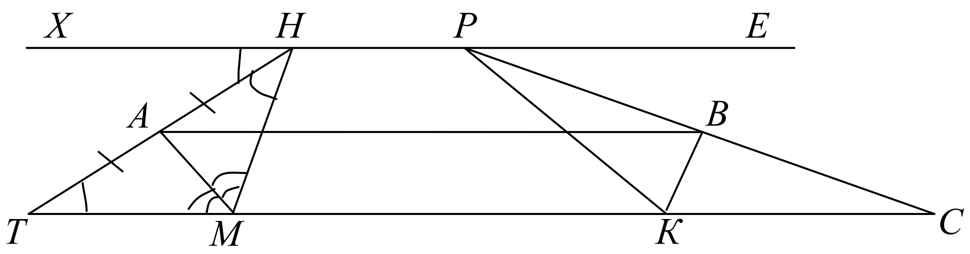
Ответ. В первый день Дед Мороз подготовил 64 подарка в маленьких коробках, за два дня Дед Мороз подготовил 254 подарка.

Задача 5

Биссектрисы внешних углов M и H трапеции $MHPK$ с основания MK и HP пересекаются в точке A, а биссектрисы внешних углов P и K пересекаются в точке B. Найдите длину отрезка AB, если периметр трапеции $MHPK$ равен 34 дм.

Решение.

Пусть, для определенности, $MK > HP$. Отметим точку X на



продолжении основания HP за точку H, точку E – на продолжении основания

HP за точку P. Проведем HT – биссектрису $\angle XHM$, $T \in MK$, PC – биссектрису $\angle EPK$, $C \in MK$, MA – биссектрису $\angle TMH$, $A \in TH$, KB – биссектрису $\angle CKP$, $B \in PC$.

$\angle XHT = \angle HTM$ как накрестлежащие при параллельных прямых HP и MK и секущей HT, $\angle XHT = \angle THM$ так как HT – биссектриса $\angle XHM$, следовательно, $\angle HTM = \angle THM$, значит, ΔTHM – равнобедренный с основанием HT по признаку равнобедренного треугольника, поэтому $TM = MH$. Так как MA – биссектриса $\angle TMH$, то точка A – середина основания TH по свойству равнобедренного треугольника. Аналогично, $PK = KC$ и точка B – середина отрезка PC.

Так как $MHPK$ – трапеция с основаниями MK и PH, то $THPC$ – трапеция с основаниями TC и HP. AB – средняя линия трапеции $THPC$ по определению, значит, $AB = 0{,}5(TC + HP)$ по свойству средней линии трапеции. В силу того, что $TC = TM + MK + KC$, $TM = MH$, $PK = KC$, получаем $AB = 0{,}5(TC + HP) = 0{,}5(MH + MK + PK + HP) = 0{,}5 \cdot P_{MHPK} = 0{,}5 \cdot 34 = 17$(дм).

Ответ. $AB = 17$ дм.