Задание № 3.

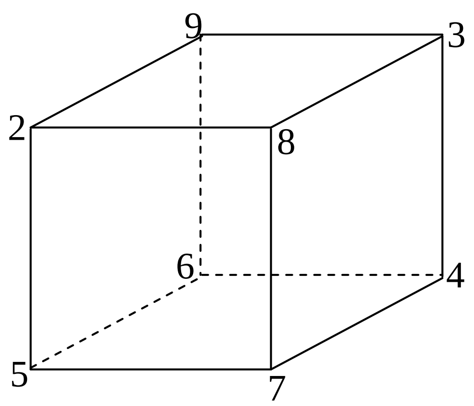
Задача 1

В вершинах куба расставили числа от 2 до 9 (в каждой вершине по одному числу) для каждой грани вычислили сумму чисел, стоящих в вершинах этой грани. Можно ли так расставить числа от 2 до 9 в вершинах куба, чтобы все суммы чисел на гранях были одинаковыми? Ответ обосновать.

Решение

В задачах с аналогичной формулировкой ответ может быть как «можно», так и «нельзя». Если дается ответ «можно», то обоснованием является приведение любого примера расстановки чисел от 2 до 9 в вершинах куба, удовлетворяющего условиям задачи; если дается ответ «нельзя», то обоснованием является доказательство того, что как бы мы не расставили числа от 2 до 9 в вершинах куба, условие задачи выполняться не будет (приведение конкретного примера, не удовлетворяющего условиям задачи, не доказывает того, что при другой расстановке чисел на ребрах куба условие задачи так же выполняться не будет).

Сумма чисел от 2 до 9 включительно равна $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 11 \cdot 4 = 44$. Так как число, стоящее в любой вершине куба при вычислении суммы чисел, стоящих в вершинах грани куба, будет учитываться трижды (любая вершина куба относится к трем граням куба), то после вычисления сумм на всех гранях куба мы получим $44 \cdot 3 = 132$. У куба 6 граней, поэтому если есть расстановка чисел от 2 до 9 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех гранях были одинаковыми, то при такой расстановке сумма чисел на каждой грани должна быть равна $132 : 6 = 22$. Приведем пример расстановки чисел от 2 до 9 в вершинах куба, удовлетворяющий условию задачи.



Ответ. Можно.

Задача 2

Найдите все трехзначные числа, сумма цифр которых уменьшится в 3 раза, если само число увеличить на 3.

Решение

Пусть n – трехзначное натуральное число, то есть $n = 100a + 10x + y$, $1 \le a \le 9$, $0 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$, а $S(n)$ – сумма цифр числа n. Тогда в силу условия задачи $S(n) = 3S(n + 3)$. Возможны следующие случаи.

<u>1 случай.</u> $y < 7$. Тогда $n + 3 = 100a + 10x + (y + 3)$, $y + 3 \le 9$, $S(n) = a + x + y$, $S(n + 3) = a + x + y + 3 > a + x + y = S(n)$, то есть условие задачи не выполняется.

<u>2 случай.</u> $y \ge 7$, $x < 9$. Тогда $n + 3 = 100a + 10x + y + 3 = 100a + 10(x + 1) + (y - 7)$, $S(n + 3) = a + x + 1 + y - 7 = S(n) - 6$. По условию задачи $S(n) = 3S(n + 3)$, то есть $S(n) = 3(S(n) - 6)$, $S(n) = 9$, $a + x + y = 9$.

Если $y = 7$, то $a + x = 2$. В силу того, что $a \ge 1$, возможно два случая: $a = x = 1$ или $a = 2$, $x = 0$. Получили два числа 117 и 207.

Если $y = 8$, то $a + x = 1$. В силу того, что $a \ge 1$, $a = 1$, $x = 0$. Получили число 108.

Если $y = 9$, то $a + x = 0$ что невозможно, так как $a \ge 1$.

<u>3 случай.</u> $y \ge 7$, $x = 9$, $a < 9$. Тогда $n + 3 = 100a + 10x + y + 3 = 100(a + 1) + (y - 7)$, $S(n) = a + x + y = a + y + 9$, $S(n + 3) = a + 1 + y - 7 = a + y - 6 = S(n) - 15$. По условию задачи $S(n) = 3S(n + 3)$, то есть $S(n) = 3(S(n) - 15)$, $S(n) = 22{,}5$, что не возможно, так как $S(n)$ – число натуральное.

<u>4 случай.</u> $y \ge 7$, $a = x = 9$. Тогда $n + 3 = 100a + 10x + y + 3 = 1000 + (y - 7)$, $S(n) = a + x + y = y + 18$, $S(n + 3) = 1 + y - 7 = y - 6 = S(n) - 24$. По условию задачи $S(n) = 3S(n + 3)$, то есть $S(n) = 3(S(n) - 24)$, $S(n) = 36$, $y + 18 = 36$, $y = 18$, что противоречит условию $7 \le y \le 9$.

Ответ. 108, 117, 207.

Задача 3

От двух растворов соляной кислоты с различным процентным содержанием соляной кислоты объемом 8 л и 24 л отлили по одинаковому объему раствора. Отлитую часть первого раствора смешали с остатком второго раствора, а отлитую часть второго раствора – с остатком первого раствора, после чего процентное содержание соляной кислоты в обоих растворах стало одинаковым. Сколько литров кислоты отлили от каждого раствора?

Решение.

Пусть объем отлитой части от каждого из растворов соляной кислоты равен x л, в растворе объемом 8 л содержится n% соляной кислоты, а в растворе объемом 24 л содержится m% соляной кислоты, причем по условию задачи $n \neq m$. Найдем процентное содержание соляной кислоты в новых растворах.

$\frac{(8-x)\cdot 0{,}01\cdot n + x\cdot 0{,}01\cdot m}{8}\cdot 100\%$ – процентное содержание соляной кислоты в одном растворе;

$\frac{(24-x)\cdot 0{,}01\cdot m + x\cdot 0{,}01\cdot n}{24}\cdot 100\%$ – процентное содержание соляной кислоты в другом растворе.

По условию задачи процентное содержание соляной кислоты в обоих новых растворах одинаковое. Получаем уравнение:

$$\frac{(8-x)\cdot 0{,}01\cdot n + x\cdot 0{,}01\cdot m}{8}\cdot 100 = \frac{(24-x)\cdot 0{,}01\cdot m + x\cdot 0{,}01\cdot n}{24}\cdot 100,$$

$$3\cdot((8-x)\cdot n + xm) = (24-x)\cdot m + xn,$$

$$24n - 3xn + 3xm = 24m - xm + xn,$$

$$24n - 24m - 4xn + 4xm = 0,$$

$$6(n-m) - x(n-m) = 0,$$

$$(n-m)(6-x) = 0.$$

Так как $n \neq m$, то $n - m \neq 0$, следовательно, $6 - x = 0$, $x = 6$. Значит, от каждого раствора отлили по 6 л.

Ответ. 6 л.

Задача 4

Докажите, что среди чисел $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{2025}$ есть два числа, разность которых делится на 2025.

Решение.

Решение задачи опирается на следующие два утверждения:

– принцип Дирихле: если $n+1$ предмет раскладывать в n контейнеров, то хотя бы в одном контейнере окажется более одного предмета;

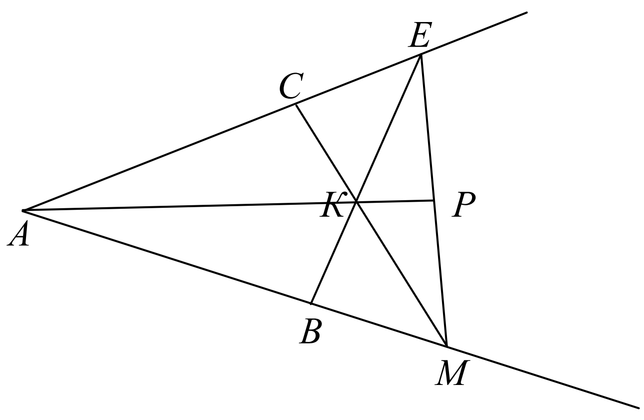
– если два целых числа a и c имеют одинаковый остаток при делении на натуральное число $n > 1$: $a = n \cdot p + r$, $c = n \cdot q + r$, $0 \le r < n$, то их разность делится на n без остатка: $a - c = (n \cdot p + r) - (n \cdot q + r) = n \cdot p + r - n \cdot q - r = n \cdot (p - q)$.

В условии задачи задано 2025 чисел: $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{2025}$, а при делении на 2025 возможно 2025 различных остатков: 0, 1, 2, …, 2025. Так как $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, то 7 и 2025 являются взаимно простыми числами, следовательно, ни одно из чисел $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{2025}$ не делится на 2025, то есть не имеет остатка 0 при делении на 2025. Таким образом, у нас есть 2025 чисел и 2024 возможных остатков при делении на 2025: 1, 2, …, 2024. Поэтому, согласно принципу Дирихле (остатки – контейнеры, числа – предметы), найдутся два числа среди чисел $7, 7^2, 7^3, \ldots, 7^{2025}$, которые имеют одинаковый остаток при делении на 2025, следовательно, разность этих двух чисел делится на 2025, **что и требовалось доказать**.

Задача 5

На одной стороне угла с вершиной A отмечены точки B и M, на другой стороне – точки C и E так, что $AB = AC$, $BM = CE$, K – точка пересечения отрезков MC и BE. Докажите, что прямые ME и KA перпендикулярны.

Решение.



Проведем прямую AK. Точку пересечения AK и ME обозначим P.

Рассмотрим ΔACM и ΔABE. $AC = AB$ – по условию, $AM = AB + BM = AC + CE = AE$, $\angle A$ – общий, значит, $\Delta ACM = \Delta ABE$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle AMC = \angle AEB$.

По условию $AM = AE$, значит,

ΔMAE – равнобедренный (по определению), следовательно, $\angle AEM = \angle AME$ (по свойству равнобедренного треугольника).

$\angle KME = \angle AME - \angle AMC$, $\angle KEM = \angle AEM - \angle AEB$, $\angle AME = \angle AEM$, $\angle AMC = \angle AEB$, значит, $\angle KME = \angle KEM$, следовательно, ΔMKE – равнобедренный (по признаку), $MK = KE$ как боковые стороны равнобедренного треугольника.

Рассмотрим ΔAKM и ΔAKE. $AM = AE$, $MK = KE$ по доказанному, AK – общая сторона. Значит, $\Delta AKM = \Delta AKE$ по трем сторонам, следовательно, $\angle MAK = \angle EAK$. Так как $\angle MAP = \angle EAP$, то AP – биссектриса равнобедренного треугольника AME, проведенная к основанию ME, следовательно, AP – высота ΔAEM, значит, $AP \perp ME$, **что и требовалось доказать.**