Задание № 3.

1. Докажите, что среди чисел, записываемых только двойками, есть число, которое делится на 2026.

Решение.

1 способ. Решение задачи опирается на следующие три утверждения:

– принцип Дирихле: если $n + 1$ предмет раскладывать в n контейнеров, то хотя бы в одном контейнере окажется более одного предмета;

– если два целых числа a и c имеют одинаковый остаток при делении на натуральное число $n > 1$: $a = n\cdot p + r$, $c = n\cdot q + r$, $0 \le r < n$, то их разность делится на n без остатка: $a - c = (n\cdot p + r) - (n\cdot q + r) = n\cdot p + r - n\cdot q - r = n\cdot(p - q)$;

– если произведение двух натуральных чисел a и c делится на натуральное число $n > 1$ и один из множителей a взаимно прост с n, то второй множитель c делится на n.

Рассмотрим 2026 чисел 2, 22, 222, …, $\underbrace{22\ldots2}_{1013\text{ двоек}}$. Каждое из чисел представимо в виде $2 = 2\cdot1$, $22 = 2\cdot11$, $222 = 2\cdot111$, …, $22\ldots2 = 2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{1013\text{ единиц}}$. Рассмотрим 2026 чисел 1, 11, 111, …, $\underbrace{11\ldots1}_{1013\text{ единиц}}$ и 1013 остатков от деления на 1013: 0, 1, …, 1012. Тогда, согласно принципа Дирихле (остатки – контейнеры, числа – предметы) найдутся два числа из рассматриваемых, которые будут иметь одинаковый остаток от деления на 1013. Пусть это будут числа $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ единиц}}$.

Пусть, для определенности, $n > m$. Тогда разность этих чисел $\underbrace{\text{делит}}_{n-m\text{ единиц}}$ся на 1013: $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}} - \underbrace{11\ldots1}_{m\text{ единиц}} = \underbrace{11\ldots1}_{n-m\text{ единиц},}\underbrace{00\ldots0}_{m\text{ нулей}} = \underbrace{11\ldots1}_{n-m\text{ единиц}}\cdot10^m$ делится на 1013. Так как 1013 – простое число, а $10^m = 2^m\cdot5^m$, то 10^m и 1013 взаимно просты, следовательно, $\underbrace{11\ldots1}_{n-m\text{ единиц}}$ делится на 1013, а число $2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n-m\text{ единиц}} = \underbrace{22\ldots2}_{n-m\text{ двоек}}$ делится на $2\cdot1013 = 2026$, **что и требовалось доказать**.

2 способ. Так как $2026 = 2\cdot1013$, а 1013 является простым натуральным числом, то воспользуемся малой **теоремой Ферма**: пусть p число простое и a не делится на p, тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Так как 1013 число простое и 10 не делится на 1013, то по малой теореме Ферма $10^{1012} \equiv 1 \pmod{1013}$, то есть $10^{1012} - 1$ делится на 1013. $10^{1012} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{1012\text{ девяток}} = 9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{1012\text{ единиц}}$. Так как 9 и 1013 взаимно просты, то $\underbrace{11\ldots1}_{1012\text{ единиц}}$ делится на 1013, а поэтому $2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{1012\text{ единиц}} = \underbrace{22\ldots2}_{1012\text{ двоек}}$ делится на $2\cdot1013 = 2026$, **что и требовалось доказать**.

2. Пусть a и b – различные простые натуральные числа. Докажите, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение.

Пусть уравнение $ax + by = ab$ имеет решение в натуральных числах. Так как a и b – различные простые натуральные числа, то они являются взаимно простыми. Так как ax и ab делятся на a, то, чтобы равенство $ax + by = ab$ было верным, и by делится на a, а в силу того, что a и b взаимно просты, получаем, что y делится на a, то есть $y = ma$, где m – число натуральное. Тогда, подставляя в уравнение вместо y ma и деля обе части уравнения на a, получаем $x + bm = b$, что невозможно в силу того, что x и m – числа натуральные, то есть $x \geq 1$, $m \geq 1$, откуда $x + bm > b$. Значит, наше предположение не верно и уравнение $ax + by = ab$, где a и b – различные простые натуральные числа, не имеет решений в натуральных числах, **что и требовалось доказать**.

3. Решите уравнение

$$(x^2 + 2x - 1)^2 - x^3 = 17.$$

Решение.

Представим число 10 в виде суммы двух слагаемых: 17 = 25 – 8, тогда

$$(x^2 + 2x - 1)^2 - x^3 = 17,$$
$$(x^2 + 2x - 1)^2 - x^3 = 25 - 8,$$
$$(x^2 + 2x - 1)^2 - 25 = x^3 - 8,$$
$$(x^2 +2\,x - 1)^2 - 5^2 = x^3 - 2^3,$$
$$(x^2 + 2x - 1 - 5)(x^2 + 2x - 1 + 5) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2),$$
$$(x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0,$$
$$(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 6 - (x - 2)) = 0,$$
$$(x^2 + 2x + 4)(x^2 + x - 4) = 0,$$

$x^2 + 2x + 4 = 0$ или $x^2 + x - 4 = 0,$

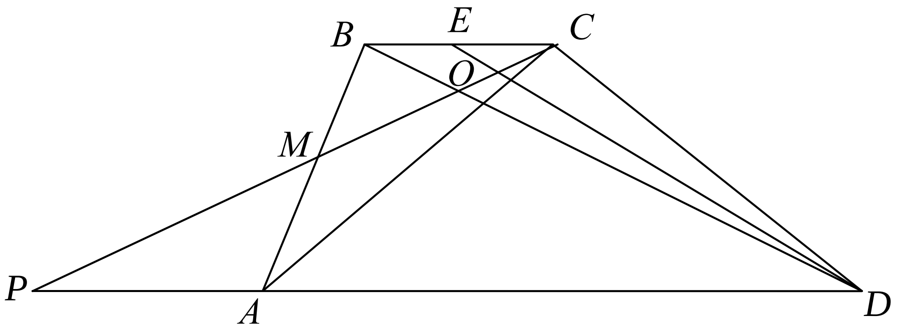
$D = 4 - 16 < 0$ $\quad$ $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2},$

действительных корней нет. $\quad$ $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$

Ответ. $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

4. В трапеции $ABCD$ точка E — середина основания BC, точка M — середина боковой стороны AB. Отрезки CM и DE пересекаются в точке O.
   a) Докажите, что площади четырёхугольника $BMOE$ и треугольника COD равны.
   b) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника $BMOE$, если основания трапеции относятся как 2:5.

Решение.



а) $BC \parallel AD$ как основания трапеции, следовательно, $\rho(A, BC) = \rho(D, BC)$.

Рассмотрим ΔABC и ΔDBC. BC – общее основание и в силу того, что $\rho(A, BC) = \rho(D, BC)$, высота, проведенная в ΔABC из вершины A равна высоте, проведенной в ΔDBC из вершины D. Значит, $S_{ABC} = S_{DBC}$. Так как медиана треугольника делит треугольник на два треугольника, равных по площади (равновеликих треугольника), то, в силу того, что CM – медиана ΔABC, а DE – медиана ΔDBC, то $S_{MBC} = 0{,}5S_{ABC}$, а $S_{DEC} = 0{,}5S_{DBC}$, откуда в силу равенства площадей ΔABC и ΔDBC получаем, что $S_{MBC} = S_{DEC}$.

$S_{COD} = S_{DCE} - S_{EOC}$, $S_{BMOE} = S_{BMC} - S_{EOC}$, следовательно, $S_{BMOE} = S_{COD}$, **что и требовалось доказать**.

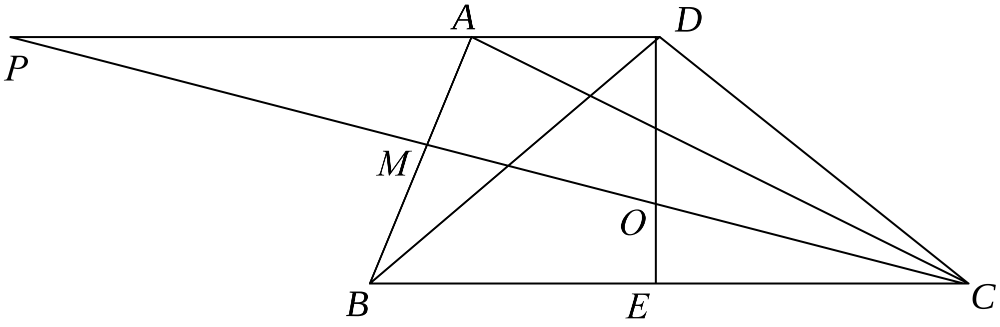
б) 1 случай. $BC < AD$, тогда $BC : AD = 2 : 5$. Пусть $BC = 2x$, $AD = 5x$, высота трапеции равна h. Тогда $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot h = 3{,}5xh$, $CE = 0{,}5BC = x$. Так как высота ΔABC, проведенная из вершина A равна высоте трапеции $ABCD$, то $S_{ABC} = 0{,}5BC \cdot h = xh$; $S_{DBC} = S_{ABC} = xh$, $S_{MBC} = S_{DEC} = 0{,}5S_{DBC} = 0{,}5xh$. Треугольники COE и CED имеют общую высоту, проведенную из вершины C, поэтому $\dfrac{S_{COE}}{S_{CED}} = \dfrac{OE}{ED}$.

Продлим CM до пересечения с AD. Точку пересечения CM и AD обозначим P. Рассмотрим ΔAPM и ΔBCM. $AM = MB$ по условию, $\angle AMP = \angle CMB$ как вертикальные. $\angle MPA = \angle MCB$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей PC. Значит, $\Delta AED = \Delta CEB$ по стороне и двум прилежащим к ней углам, следовательно, $AP = BC = 2x$.

Рассмотрим ΔCOE и ΔPOD. $\angle COE = \angle POD$ как вертикальные. $\angle OCE = \angle OPD$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей PC. Значит, $\Delta AED \sim \Delta CEB$ по двум углам, следовательно, $\dfrac{OE}{OD} = \dfrac{CE}{PD} = \dfrac{CE}{PA + AD} = \dfrac{x}{2x + 5x} = \dfrac{1}{7}$. Пусть $OE = y$, тогда $OD = 7y$. Найдем отношение $\dfrac{OE}{ED} = \dfrac{OE}{EO + OD} = \dfrac{y}{y + 7y} = \dfrac{1}{8}$. Тогда $S_{COE} = \dfrac{1}{8}S_{CED} = \dfrac{1}{8} \cdot 0{,}5xh = \dfrac{1}{16}xh$.

Найдем теперь площадь четырехугольника $BMOE$: $S_{BMOE} = S_{BMC} - S_{EOC} = \dfrac{xh}{2} - \dfrac{xh}{16} = \dfrac{7}{16}xh$. Значит, $\dfrac{S_{BMOE}}{S_{ABCD}} = \dfrac{7xh \cdot 2}{16 \cdot 7xh} = \dfrac{1}{8}$, то есть $S_{BMOE} = \dfrac{1}{8}\ S_{ABCD}$.

2 случай. $BC > AD$, тогда $BC : AD = 5 : 2$. Повторяя рассуждения первого случая



получаем, что $S_{ABCD} = 3{,}5xh$, $CE = 0{,}5BC = 2{,}5\,x$. $S_{DBC} = S_{ABC} = \frac{5}{2}xh$, $S_{MBC} = S_{DEC} = \frac{5}{4}xh$. $\Delta AED \sim \Delta CEB$, следовательно, $\frac{OE}{OD} = \frac{CE}{PD} = \frac{CE}{PA+AD} = \frac{2{,}5x}{2x+5x} = \frac{5}{14}$.

Пусть $OE = 5y$, тогда $OD = 14y$. $\frac{OE}{ED} = \frac{OE}{EO+OD} = \frac{5y}{5y+14y} = \frac{5}{19}$. Тогда $S_{COE} = \frac{5}{19}S_{CED} = \frac{5}{19}\cdot\frac{5}{4}xh = \frac{25}{19\cdot 4}xh$; $S_{BMOE} = S_{BMC} - S_{EOC} = \frac{5xh}{4} - \frac{25xh}{19\cdot 4} = \frac{5(19-5)}{19\cdot 4}xh = \frac{35}{38}xh$. Значит, $\frac{S_{BMOE}}{S_{ABCD}} = \frac{35xh\cdot 2}{38\cdot 7xh} = \frac{5}{19}$, то есть $S_{BMOE} = \frac{5}{19}S_{ABCD}$.

Ответ. $S_{BMOE} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$ или $S_{BMOE} = \frac{5}{19}S_{ABCD}$.

5. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 7? Ответ обосновать. В случае положительного ответа указать способ построения пар таких чисел.

Решение.

Пусть A – первое число, тогда $A + 1$ – второе число. Обозначим за $S(A)$ – сумму цифр числа A. Возможно два случая.

1 случай. Последняя цифра числа A меньше 9. Тогда у числа $A + 1$ все цифры, кроме последней, совпадают с соответствующими цифрами числа A, а последняя цифра увеличилась на 1, значит, $S(A+1) = S(A) + 1$, то есть $S(A)$ и $S(A+1)$ – два последовательных натуральных числа, а поэтому не могут оба быть кратными 7, так как два последовательных натуральных числа являются взаимно простыми (не имеют общих натуральных делителей, кроме 1).

2 случай. Число A оканчивается цифрой 9. Пусть число A оканчивается на m девяток, то есть $A = B\cdot 10^m + \underbrace{99\ldots9}_{m \text{ девяток}}$, где $B = 0$ или натуральное число, последняя цифра которого меньше 9.

Тогда $A + 1 = (B+1)\cdot 10^m$. $S(A) = S(B) + 9m$, $S(A+1) = S(B) + 1$. Чтобы $S(A)$ и $S(A+1)$ были кратны 7 необходимо, чтобы их разность делилась на 7.

$S(A) - S(A+1) = 9m - 1$. Так как 7 и 4 взаимно просты, $9m - 1$ кратно 7 тогда и только тогда, когда $4(9m-1) = 36m - 4$ кратно 7. В силу того, что $35m$ кратно 7, $36m - 4$ кратно 7 тогда и только тогда, когда $m - 4$ кратно 7. Таким образом, количество девяток на конце числа A должно иметь остаток 4 при делении на 7. И при этом $S(B) + 1$ должно быть кратно 7, чтобы сумма цифр числа $A + 1$ делилась на 7, а значит, $S(B)$ при делении на 7 имеет остаток 6.

Таким образом получаем способ построения пар искомых чисел: выбираем натуральное число, сумма цифр которого при делении на 7 имеет остаток 6 и последняя цифра которого меньше 9 (это число B), далее выбираем натуральное число, которое при делении на 7 имеет остаток 4 (это и будет количество девяток на конце числа A), добавляем в конце числа B выбранное количество цифр 9. Получаем искомое число A.

Например, наименьшее натуральное число, сумма цифр которого при делении на 7 имеет остаток 6 – число 6, т.е. $B = 6$. Наименьшее натуральное число, которое делится на 7 с остатком 4, – это число 4. Тогда получаем число $A = 69999$. Число $A + 1 = 69999 + 1 = 70000$. $S(A) = 6 + 9 \cdot 4 = 42$, $42 \vdots 7$, $S(A) = 7 + 0 \cdot 4 = 7$, $7 \vdots 7$.

Ответ. Существуют.