РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 2 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2025-2026 учебный год)

Задача 1

Золушка решила орехи, оставшиеся после поиска волшебных орехов, разделить между знакомыми бельчатами. Первый бельчонок получил m орехов и n-ю часть оставшихся орехов, второй - $2m$ орехов и n-ю часть оставшихся орехов, третий – $3m$ орехов и -ю часть оставшихся орехов и так далее. Оказалось, что всем бельчатам орехов досталось поровну. Сколько было бельчат и сколько орехов?

Решение

Предположим, бельчат было k, и каждый получил t орехов. Тогда последний бельчонок получил km орехов, то есть $t = km$ и всего орехов было $tk = k^2m$. Первый бельчонок получил

$$m + \frac{k^2m - m}{n} = km$$

орехов, то есть $k^2 - kn + n - 1 = 0$, $(k-1)(k+1-n) = 0$.
Так как бельчат было больше чем 1, $k = n - 1$, всего орехов - $(n-1)^2m$.
Например, пусть $m = 2, n = 4$. Тогда бельчат трое, орехов – 18.
Первый бельчонок получил $2 + 16:4 = 6$ орехов, второй $2 \cdot 2 + 8:4 = 6$ орехов и третий - $2 \cdot 3 = 6$ орехов.

Ответ: $n - 1$ бельчонок и $(n-1)^2m$ орехов.

Задача 2

Миша ходит вокруг площади Горького по часовой стрелке со скоростью 2 м/с. Когда он проходит мимо автобусной остановки, от остановки в противоположном направлении начинает двигаться Женя с постоянным ускорением 0,01 м/с^2. Через какое время после этого ребята встретятся первый раз, если второй раз они встретятся снова на остановке?

Решение

Пусть s – длина пути вокруг площади, t_1 – время до первой встречи (в секундах), t_2 – время в секундах до второй встречи. За t секунд Миша проходит расстояние $2t$ метров, а Женя – расстояние $0{,}01t^2/2$ метров.
За время t_1 ребята совместно проходят полный круг, а за время t_2 каждый из них проходит полный круг. Получаем:

$$2t_1 + \frac{0{,}01t_1^2}{2} = 2t_2 = \frac{0{,}01t_2^2}{2}.$$

Из второго равенства находим, что $t_2 = 400$ и получаем квадратное уравнение

$$t_1^2 + 400t_1 - 160000 = 0,$$

решая которое, находим $t_1 = 200(\sqrt{5} - 1)$.

Ответ: $200(\sqrt{5} - 1)$ с.

Задача 3

Определите, делится ли C_{2000}^{1000} на 11.

Решение

$$C_{2000}^{1000} = \frac{2000!}{1000! \cdot 1000!}.$$

Установим, на 11 в какой степени делится число $2000!$.

$$2000 = 11 \cdot 181 + 9,$$

то есть среди чисел от 1 до 2000 на 11 делятся 181. Из этих 181 на 121 делятся 16, из 16 одно число делится на 11^3 .

Таким образом, $2000!$ делится на 11 в степени $181 + 16 + 1 = 198$.

Аналогично, число $1000!$ делится на 11 в степени $90 + 8 = 98$, и, следовательно, знаменатель дроби делится на 11 в степени 196. Так как 198>196, C_{2000}^{1000} на 11 делится (а точнее, делится на 11^2=121).

Ответ: делится.

Задача 4

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-2|} = \sqrt{3|y|}, \\ 9y^2 + x^2 - 5a = 4x - 4 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение

Обозначим $\sqrt{|x-2|} = t$, $\sqrt{3|y|} = v$. Тогда $|x-2| = t^2$, $3|y| = v^2$, то есть

$$x = 2 \pm t^2, \quad y = \pm \frac{v^2}{3}.$$

Каждому значению $t > 0$ соответствует два значения x, каждому значению $v > 0$ соответствует два значения y; если $t = 0$, то $x = 2$, если $v = 0$, то $y = 0$.

Система перепишется в виде

$$\begin{cases} t+v=1, \\ t^4+v^4=5a, \\ t \ge 0, v \ge 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Таким образом, исходная система может иметь ровно четыре различных решения в следующих случаях:

- система (*) имеет единственное решение (t, v), причем $t \neq 0$, $v \neq 0$;
- система (*) имеет два решения (t, v), причем в этих решениях либо $t = 0$, либо $v = 0$.

Если (t, v) – решение системы (*), то (v, t) - тоже решение системы (*), поэтому решение системы может быть единственным, только если $t = v$. Получаем

$$t = v = 0{,}5,$$

$$5a = 2 \cdot (0{,}5)^4 = 0{,}125, \; a = 0{,}025.$$

Если $t = 0$, то $v = 1$, $5a = 1$, $a = 0{,}2$.

Проверим, что при найденных значениях параметров выполнено условие задачи.

Первое уравнение системы возведём в квадрат:

$$t^2 + v^2 = 1 - 2tv.$$

Ещё раз возведём в квадрат:

$$t^4 + v^4 = (1 - 2tv)^2 - 2t^2v^2 = 1 - 4tv + 2t^2v^2 = 2(tv - 1)^2 - 1.$$

Если $a = 0{,}025$,

$$2(tv - 1)^2 = 9/8, \; tv - 1 = \pm 3/4, \; tv = 1/4 \text{ или } tv = 7/4.$$

Система

$$\begin{cases} t+v=1 \\ tv=1/4 \end{cases}$$

имеет единственное решение $t = v = 0{,}5$, система

$$\begin{cases} t+v=1 \\ tv=7/4 \end{cases}$$

решений не имеет.

Таким образом, система (*) действительно имеет единственное решение, исходная система имеет решения

$$\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{12}\right), \left(\frac{7}{4}; -\frac{1}{12}\right), \left(\frac{9}{4}; \frac{1}{12}\right), \left(\frac{9}{4}; -\frac{1}{12}\right).$$

Если $a = 0{,}2$, то $(tv - 1)^2 = 1$, $tv = 0$ или $tv = 2$.

Так как система

$$\begin{cases} t+v=1 \\ tv=2 \end{cases}$$

решений не имеет, система (*) имеет два решения, $(1; 0)$ и $(0; 1)$, исходная система имеет решения

$$\left(2; \frac{1}{3}\right), \left(2; -\frac{1}{3}\right), (1; 0), (3; 0).$$

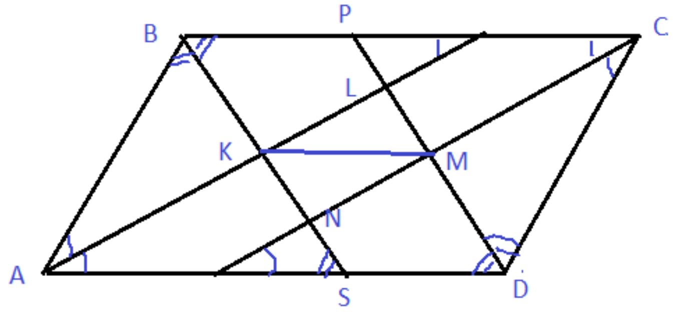
Ответ: $a = 1/40$ или $a = 1/5$.

Задача 5

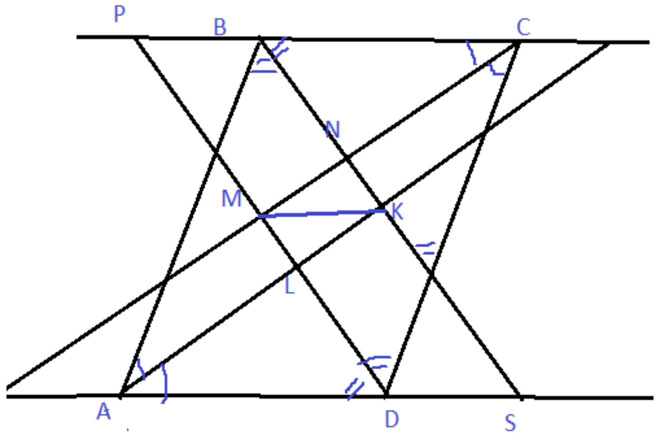
Сторона AB параллелограмма $ABCD$ равна 13. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, биссектрисы углов C и D – в точке M, прямые AK и DM- в точке L, прямые BK и CM- в точке N. Найдите BC и LN, если $KM = 4$.

Решение

Прямая AK параллельна CM, BK параллельна DM. Так как $\angle BAK + \angle ABK = (\angle BAD + \angle ABC)/2 = 90^{\circ}$, $\angle AKB = 90^{\circ}$. Аналогично, $\angle CMD = 90^{\circ}$. Таким образом, $KLMN$ – прямоугольник. Так как диагонали прямоугольника равны, $LN = KM = 4$. Обозначим через S точку пересечения BK с прямой AD, через P - точку пересечения DM с прямой BC. Тогда $BSDP$ - параллелограмм, $BS = PD$.



Треугольники ABS и PCD - равнобедренные, поэтому $BK = KS = BS/2 = PD/2 = PM = MD$. Следовательно, $BKMP$ - параллелограмм, $BP = KM = 4$. Так как $CP = CD = AB = 13$, $BC = CP + PB = 17$ или
$BC = CP - PB = 9$.



Ответ: $LN = 4$, $BC = 9$ или $BC = 13$.