Задание № 4

Задача 1

Трехзначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру переставить на первое место и найти разность между полученным и исходным числом, то получится трехзначное число, в котором каждая следующая цифра на один больше предыдущей. Найдите все такие трехзначные числа.

Решение

<u>1 способ.</u> Обозначим трехзначное число, оканчивающееся цифрой 7, как $\overline{ac7}$, где a и c – цифры, причем, $a \neq 0$, $\overline{ac7}$ = 100a + 10c + 7. После перестановки цифры 7 в начало получим трехзначное число $\overline{7ac}$ = 700 + 10a + c. По условию задачи разность $\overline{7ac} - \overline{ac7}$ представляет собой трехзначное число, в котором каждая следующая цифра на один больше предыдущей, то есть $\overline{7ac} - \overline{ac7}$ = $\overline{x(x+1)(x+2)}$, где x – цифра, причем, $0 < x < 8$. Таким образом, получаем уравнение

$$(700 + 10a + c) - (100a + 10c + 7) = 100x + 10(x + 1) + x + 2;$$
$$700 + 10a + c - 100a - 10c - 7 = 111x + 12;$$
$$693 - 90a - 9c = 111x + 12;$$
$$231 - 30a - 3c = 37x + 4.$$

Так как $231 - 30a - 3c$ делится на 3, то и $37x + 4$ делится на 3. Так как число 4 при делении на 3 дает остаток 1, то $37x$ при делении на 3 должно иметь остаток 2. Но 37 при делении на 3 дает остаток 1, поэтому x при делении на 3 имеет остаток 2. Так как x – цифра, $0 < x < 8$, то x может принимать одно из двух значений: 2 или 5.

При $x = 2$ $231 - 30a - 3c = 78$, $30a + 3c = 153$, $10a + c = 51$, то есть $\overline{ac}$ = 51, откуда $a = 5$, $c = 1$.

При $x = 5$ $231 - 30a - 3c = 189$, $30a + 3c = 42$, $10a + c = 14$, то есть $\overline{ac}$ = 14, откуда $a = 1$, $c = 4$.

<u>2 способ.</u> Обозначим трехзначное число, оканчивающееся цифрой 7, как $\overline{ac7}$, где a и c – цифры, причем, $a \neq 0$, $\overline{ac7}$ = 100a + 10c + 7. После перестановки цифры 7 в начало получим трехзначное число $\overline{7ac}$ = 700 + 10a + c. По условию задачи разность $\overline{7ac} - \overline{ac7}$ представляет собой трехзначное число, в котором каждая следующая цифра на один больше предыдущей, то есть может быть одним из чисел 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789. Найдем число $\overline{7ac} - \overline{ac7}$= = $(700 + 10a + c) - (100a + 10c + 7) = 700 + 10a + c - 100a - 10c - 7 = 693 - 90a -$ $- 9c = 9(77 - 10a - c)$. Получили, что число $\overline{7ac} - \overline{ac7}$ делится на 9. Среди чисел 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789 на 9 делятся только 234 и 567.

Если $\overline{7ac} - \overline{ac7}$ = 234, то есть $9(77 - 10a - c) = 234$, то $77 - 10a - c = 26$, $10a + c = 51$, $\overline{ac}$ = 51, откуда $a = 5$, $c = 1$.

Если $\overline{7ac} - \overline{ac7} = 567$, то есть $9(77 - 10a - c) = 567$, то $77 - 10a - c = 63$, $10a + c = 14$, $\overline{ac} = 14$, откуда $a = 1$, $c = 4$.

Ответ. 147, 517**.**

Задача 2

Для каждого значения параметра a решите уравнение $\dfrac{ax}{2a+1} + \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{7x+2}{3}$.

Решение

В данном уравнении присутствуют две переменные a и x, но у этих переменных разный смысл: x – неизвестная, a – постоянная (которая получила название параметр). Специфика задач с параметром состоит в следующем: рассматривается не одно уравнение, а целое семейство уравнений одновременно, в котором каждое уравнение семейства получается при конкретном значении параметра. Так как параметр может принимать бесконечное множество различных значений, то выписать все уравнения семейства мы не сможем. Однако каждое уравнение семейства должно быть решено.

Чтобы решить каждое из уравнений заданного семейства поступают следующим образом: все множество допустимых значений параметра (тех значений, при которых уравнение имеет смысл) разбивают на подмножества и решают задачу на каждом из подмножеств. Чтобы множество допустимых значений параметра разбить на подмножества, нужно найти те значения параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение задачи.

В уравнении $\dfrac{ax}{2a+1} + \dfrac{x-5}{4} = \dfrac{7x+2}{3}$. значение параметра $a = -0{,}5$ является не допустимым, так как при $a = -0{,}5$ уравнение не имеет смысла.

Преобразуем уравнение при $a \neq -0{,}5$.

$$\frac{ax}{2a+1} + \frac{x-5}{4} = \frac{7x+2}{3}.$$

$$\frac{ax}{2a+1} + \frac{x-5}{4} - \frac{7x+2}{3} = 0.$$

$$\frac{12ax + 3(2a+1)(x-5) - 4(2a+1)(7x+2)}{12(2a+1)} = 0;$$

$$\frac{12ax + 3x(2a+1) - 30a - 15 - 28x(2a+1) - 16a - 8}{12(2a+1)} = 0;$$

$$\frac{x(12a + 6a + 3 - 56a - 28) - 46a - 23}{12(2a+1)} = 0;$$

$$\frac{x(-38a - 25) - 23(2a+1)}{12(2a+1)} = 0.$$

При $a \neq -0{,}5$ $2a + 1 \neq 0$, значит, уравнение $\dfrac{x(-38a-25)-23(2a+1)}{12(2a+1)} = 0$ равносильно уравнению $-x(38a + 25) - 23(2a + 1) = 0$. Решение полученного уравнения разбивается на 2 случая.

<u>1 случай</u>. При $a = -\dfrac{25}{38}$ уравнение принимает вид $0 \cdot x + \dfrac{138}{19} = 0$. Полученное уравнение решений не имеет.

<u>2 случай.</u> При $a \neq -\dfrac{25}{38}$ и $a \neq -0{,}5$ $38a + 25 \neq 0$, следовательно, уравнение $-x(38a + 25) - 23(2a + 1) = 0$ имеет один корень. Найдем корень уравнения

$$-x(38a + 25) - 23(2a + 1) = 0,$$
$$-x(38a + 25) = 23(2a + 1),$$
$$x = -\frac{23(2a+1)}{38a+25}.$$

Ответ. При $a = -0{,}5$ уравнение не имеет смысла;

при $a = -\dfrac{25}{38}$ уравнение не имеет решений;

при $a \neq -\dfrac{25}{38}$ и $a \neq -0{,}5$ $x = -\dfrac{23(2a+1)}{38a+25}$.

Задача 3

Разложите на множители многочлен $x^6 - y^6 + 6x^2y^2 + 8$.

Решение

<u>1 способ</u>. Для разложения многочлена на множители прибавим и вычтем сумму $3x^4y^2$ и $3x^2y^4$. Получим

$$x^6 - y^6 + 6x^2y^2 + 8 = x^6 - y^6 + 6x^2y^2 + 8 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 =$$
$$= (x^3 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^3) + 8 + (6x^2y^2 + 3x^4y^2 - 3x^2y^4) =$$
$$=(x^2 - y^2)^3 + 2^3 + 3x^2y^2(2 + x^2 - y^2) = (x^2 - y^2 + 2)((x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 4) +$$
$$+ 3x^2y^2(2 + x^2 - y^2) = (x^2 - y^2 + 2)(x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2 + 4 + 3x^2y^2) =$$
$$= (x^2 - y^2 + 2)(x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2 + 4).$$

<u>2 способ.</u> Воспользуемся формулой

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

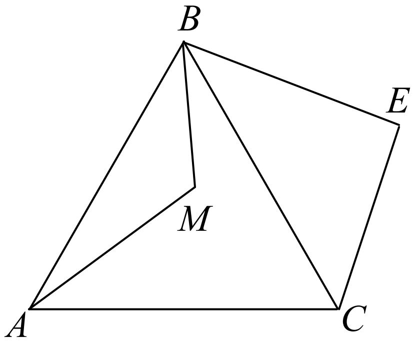
Тогда

$$x^6 - y^6 + 6x^2y^2 + 8 = (x^2)^3 + (-y^2)^3 + 2^3 - 3x^2 \cdot (-y^2) \cdot 2 =$$
$$= (x^2 - y^2 + 2)((x^2)^2 + (-y^2)^2 + 2^2 - x^2 \cdot (-y^2) - 2x^2 - 2(-y^2)) =$$
$$= (x^2 - y^2 + 2)(x^4 + y^4 + 4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2)$$

Ответ. $x^6 - y^6 + 6x^2y^2 + 8 = (x^2 - y^2 + 2)(x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2 + 4)$.

Задача 4

Вне равностороннего треугольника ABC отмечена точка E, а внутри него – точка M. Докажите, что $MA < BE + EC$.



Решение

Так как ΔABC равносторонний, то $AB = AC = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = \angle ABC = 60°$. Так точка M выбрана внутри ΔABC, то луч AM проходит внутри $\angle BAC$, а луч BM – внутри $\angle ABC$, значит, $\angle BAM < \angle BAC = 60°$, $\angle ABM < \angle ABC = 60°$.

Рассмотрим ΔABM. $\angle AMB = 180° - \angle BAM - \angle ABM > 180° - 60° - 60° = = 60°$, то есть $\angle AMB > \angle ABM$, следовательно, $AB > AM$, так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Точка E расположена вне треугольника ABC.

Если точка E лежит на продолжении отрезка BC, то один из отрезков BE или EC будет содержать отрезок BC, а поэтому $BE + EC > BC$.

Если точка E не лежит на продолжении отрезка BC, то точки B, C и E образуют треугольник, тогда в силу неравенства треугольника $BE + EC > BC$.

Таким образом, $BE + EC > BC = AB > AM$, то есть $BE + EC > AM$, **что и требовалось доказать.**

Задача 5

Есть 6 монет, из которых две – фальшивые, причем каждая фальшивая монета легче настоящей и массы фальшивых монет равны. В вашем распоряжении чашечные весы без гирь. Нужно за три взвешивания определить обе фальшивые монеты. Как это сделать?

Решение

1 способ. Разделим монеты на две группы по три монеты в каждой.

1 взвешивание. На одной чаше весов одна группа из трех момент, на другой – другая. Возможно два случая.

1 случай. Весы находятся в равновесии. Тогда в каждой группе из трех момент две монеты настоящие и одна фальшивая.

2 взвешивание. На одной чаше весов одна из монет первой группы, на другой – другая. Если весы в равновесии, то обе монеты, лежащие на чашах весов, настоящие, а третья (оставшаяся) монета первой группы является фальшивой. Если весы не в равновесии, то та монета, которая легче, является фальшивой, а две другие монеты первой группы настоящие.

3 взвешивание. На одной чаше весов одна из монет второй группы, на другой – другая. Если весы в равновесии, то обе монеты, лежащие на чашах весов, настоящие, а третья (оставшаяся) монета второй группы является фальшивой. Если весы не в равновесии, то та монета, которая легче, является фальшивой, а две другие монеты второй группы настоящие.

2 случай. Весы после первого взвешивания не находятся в равновесии. Тогда обе фальшивые монеты в той группе, которая легче.

2 взвешивание. На одной чаше весов одна из монет той группы, которая легче, на другой – другая. Если весы в равновесии, то обе монеты, лежащие на чашах весов, фальшивые, а третья (оставшаяся) монета легкой группы и все монеты тяжелой группы являются настоящими. Если весы не в равновесии, то та монета, которая легче, и третья (оставшаяся) монета легкой группы являются фальшивыми, а монета, которая тяжелее, и все монеты тяжелой группы являются настоящими. В этом случае третье взвешивание не потребуется.

2 способ. Разделим монеты на три группы по две монеты в каждой.

1 взвешивание. На одной чаше весов одна группа из двух момент, на другой – другая. Возможно два случая.

1 случай. Весы находятся в равновесии. Тогда или в каждой группе из двух монет, лежащих на чашах весов, одна монета фальшивая и одна настоящая, или все монеты, лежащие на чашах весов, настоящие, а две монеты оставшейся третьей группы являются фальшивыми.

2 взвешивание. На одной чаше весов одна из монет первой группы, на другой – другая.

1.1. Если весы в равновесии, то обе монеты, лежащие на чашах весов, настоящие, а обе фальшивые монеты в той группе, которую мы не использовали при первом взвешивании. (В этом случае третье взвешивание не потребуется.)

1.2. Если весы не в равновесии, то та монета, которая легче, является фальшивой, а другая – настоящей. Вторая фальшивая монета во второй группе, которую использовали при первом взвешивании.

3 взвешивание. На одной чаше весов одна из монет второй группы, которую использовали при первом взвешивании, на другой – другая. Та монета, которая легче, является фальшивой (это вторая фальшивая монета).

2 случай. Весы после первого взвешивания не находятся в равновесии. Тогда в той группе, которая легче, есть фальшивая монета.

2 взвешивание. На одной чаше весов одна из монет той группы, которая легче, на другой – другая.

2.1. Если весы в равновесии, то обе монеты, лежащие на чашах весов, фальшивые, а все остальные монеты являются настоящими. В этом случае третье взвешивание не потребуется.

2.2. Если весы не в равновесии, то та монета, которая легче, является фальшивой, а вторая монета на чашах весов – настоящая. В этом случае вторая фальшивая монета находится в той группе, которую не использовали при первом взвешивании.

3 взвешивание. На одной чаше весов одна из монет группы, которую не использовали при первом взвешивании, на другой – другая. Та монета, которая легче, является фальшивой (это вторая фальшивая монета).