**РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 3 ДЛЯ 9-го КЛАССА**
**(2025-2026 учебный год)**

### Задача 1

Сколько существует способов разделить $n$ орехов между тремя бельчатами так, чтобы каждый бельчонок получил хотя бы один орех?

### Решение.

***Первый способ.*** Нужно представить число $n$ в виде суммы трех натуральных слагаемых. Первое слагаемое может принимать значения 1, 2, …, $n-2$. Если первое слагаемое равно 1, то существует $n-2$варианта разбить число $n-1$ на два слагаемых:

$$n-1=1+(n-2)=2+(n-3)=\cdots=(n-2)+1.$$

Аналогично, если первое слагаемое равно 2, то выбрать остальные слагаемые можно $n-3$способами:

$$n-2=1+(n-3)=2+(n-4)=\cdots=(n-3)+1,$$

и так далее. Общее количество способов:

$$(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

**Второй способ.** Предположим, орехи выложены в ряд, количество орехов, предназначенное одному бельчонку, будем отмерять, например, шишкой. Всего нужно положить две шишки, а мест для них (промежутков между орехами в ряду) - $n-1$. Количество способов разделить орехи на три части тогда равно

$$C_{n-1}^{2}=\frac{(n-1)!}{(n-3)!\,2!}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

**Ответ:**$(n-1)(n-2)/2$

### Задача 2

Две вершины квадрата – точки с координатами $(5;2)$и $(4;5)$.Найдите координаты двух других вершин.

### Решение.

Предположим, заданные точки – соседние вершины квадрата, обозначим их $A$и $B$ соответственно, две другие вершины – точки $C$и $D$. Получим вектор $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$,

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB},\ \left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

Обозначим координаты вектора $\overrightarrow{BC}$через$(t,v)$. Тогда

$$\begin{cases}-t+3v=0,\\ t^2+v^2=10.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $t=3$, $v=1$или $t=-3$, $v=-1$.

Пусть точка $C$ имеет координаты $(x,y)$. Тогда точка $D$ имеет координаты $(x+1,y-3)$,следовательно,$\overrightarrow{BC}=(x-4,y-5)=(t,v)$,$x=t+4$, $y=v+5$. Получаем

$$C(7;6),\ D(8;3)\text{или } C(1;4),\ D(2;1).$$

Пусть теперь заданные точки – противолежащие вершины квадрата, обозначим их $A$и $C$соответственно, две другие вершины – точки $B$ и $D$.Тогда

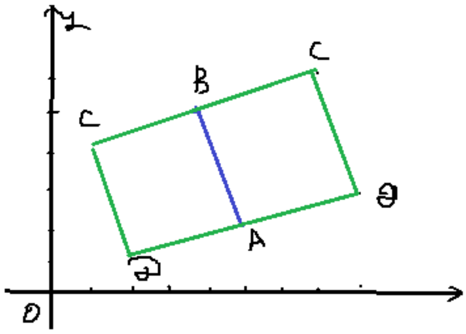
$$\overrightarrow{AC}=(-1;3),\ \overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC},\ \left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|.$$

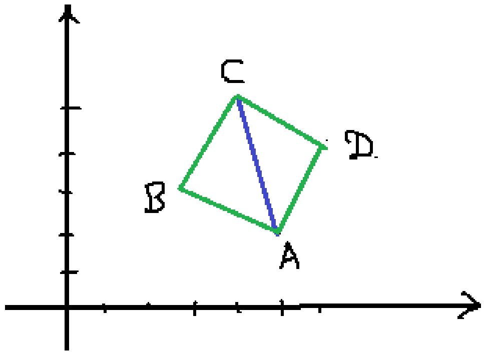
Обозначая координаты вектора $\overrightarrow{BD}$ через $(t,v)$, снова получаем систему

$$\begin{cases} -t + 3v = 0, \\ t^2 + v^2 = 10, \end{cases}$$

$t = \pm 3$, $v = \pm 1$.

Пусть точка $O$ – точка пересечения диагоналей квадрата $AC$ и $BD$, то есть $O(4{,}5; 3{,}5)$. Тогда точка $B$ имеет координаты $(4{,}5 - t/2\,; 3{,}5 - v/2)$, а точка D – координаты $(4{,}5 + t/2\,; 3{,}5 + v/2)$. Если $t = 3$, $v = 1$, получаем $B(3{,}3)$, $D(6{,}4)$, если или $t = -3$, $v = -1$, точки $B$ и $D$ меняются местами.




**Ответ:**$(7; 6)$ и $(8; 3)$ или $(1; 4)$ и $(2; 1)$ или $(3{,}3)$ и $(6{,}4)$.

### Задача 3

Четыре рождественских эльфаполучили от Санта Клаусазадание украсить за четыре дня 300 ёлоки изготовить как можно больше подарков. За один день Фриц может украсить 60 ёлок или изготовить 96 подарков, Сальвадор – украсить 42 ёлки или изготовить 63 подарка, Джинг Джилл за день украшает 36 ёлок или делает 50 подарков, а Тинсел Тед украшает 54 ёлки или делает 84 подарка. Как эльфам распределить работу на эти четыре дня, чтобы выполнить задание Санта Клауса?

### Решение.

Пусть Фриц тратит на изготовление подарков $x$ дней (и $4 - x$ дней украшает елку), Сальвадор делает подарки $y$дней, Джинг Джилл - $z$дней и Тинсел Тед – $t$дней. Тогда за четыре дня будет изготовлено

$$A = 96x + 63y + 50z + 84t$$

подарков и украшено

$$60(4 - x) + 42(4 - y) + 36(4 - z) + 54(4 - t)$$

елок. Такимобразом, нужно найти неотрицательные числа$x$, $y$, $z$, $t$, не превосходящие 4, такие, чтобы величина $A$была как можно больше и выполнялось ограничение

$$60(4 - x) + 42(4 - y) + 36(4 - z) + 54(4 - t) = 300$$

или

$$60x + 42y + 36z + 54t = 468.$$

Обозначим $x_1 = 60x$, $y_1 = 42y$, $z_1 = 36z$, $t_1 = 54t$. Тогда

$$A = \frac{96}{60}x_1 + \frac{63}{42}y_1 + \frac{50}{36}z_1 + \frac{84}{54}t_1 = \frac{144}{90}x_1 + \frac{135}{90}y_1 + \frac{125}{90}z_1 + \frac{140}{90}t_1,$$
$$x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = 468.$$

Для того, чтобы величина $A$ принимала наибольшее значение, большее значение должны иметь те из переменных $x_1$, $y_1$, $z_1$, $t_1$(и, соответственно, $x$, $y$, $z$, $t$), перед которыми стоят большие коэффициенты в выражении для $A$. Полагаем, последовательно, $x = 4$, $t = 4$, тогда

$$42y + 36z = 12.$$

Далее,

$$y = \frac{12}{42} = \frac{2}{7},\ \ z = 0.$$

Таким образом, Фриц и Тинсел Тед все четыре дня должны готовить подарки, Джинг Джилл - украшать елки, а Сальвадор $2/7$дня должен заниматься подарками, а остальное время – украшать елки. При этом будет изготовлено

$$4(96 + 84) + 63 \cdot \frac{2}{7} = 738$$

подарков.

**Задача 4**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых корни уравнения

$$(x - 2)(x^2 - 2ax - 3a^2) = 0$$

образуют арифметическую прогрессию.

**Решение.**

Приравнивая каждую скобку к нулю, получаем, что корнями уравнения будут

$$x = 2, x = -a, x = 3a.$$

По свойству арифметической прогрессии,

либо$2 \cdot 2 = 3a - a$, $a = 2$,

либо $2 \cdot (-a) = 2 + 3a$, $a = -0{,}4$,

либо $2 \cdot 3a = 2 - a$, $a = 2/7$.

Таким образом, получаем прогрессии

$$-2, 2, 6 \text{или } 6, 2, -2,$$

$$-1{,}2,\ \ 0{,}4,\ \ 2 \text{или } 2, 04, -1{,}2,$$

$$-2/7\,, 6/7\,, 2 \text{или } 2, 6/7\,, -2/7.$$

**Ответ:**2, $-0{,}4$, $2/7$.

**Задача 5**

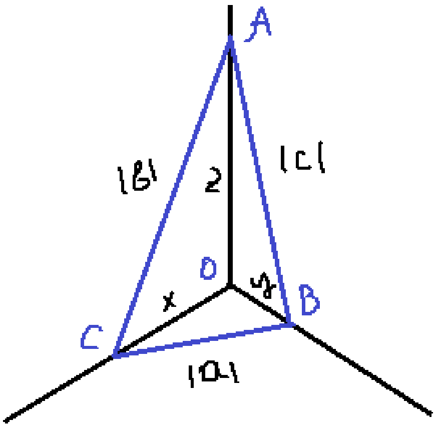
Пусть числа $a$, $b$и $c$заданы, а числа $x$, $y$и $z$удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ x^2 + xz + z^2 = b^2 \\ y^2 + yz + z^2 = c^2 \end{cases}$$

Найдите $xy + xz + yz$.

**Решение.**

Предположим, числа$x$, $y$и $z$неотрицательные. Возьмем точку $O$ на плоскости и проведем из неё три луча под углом $120^\circ$ друг к другу. Отложим на лучах отрезки $OA$, $OB$и $OC$длиной $z$, $y$и $x$ соответственно. Тогда равенства означают (по теореме косинусов), что $BC = |a|$, $AC = |b|$, $AB = |c|$.




Далее, площадь треугольника $OCB$равна $\sqrt{3}xy/4$, площадь треугольника $OAC$равна $\sqrt{3}xz/4$, площадь треугольника $OAB$равна $\sqrt{3}yz/4$. Таким образом,

$$xy + xz + yz = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{ABC} =$$

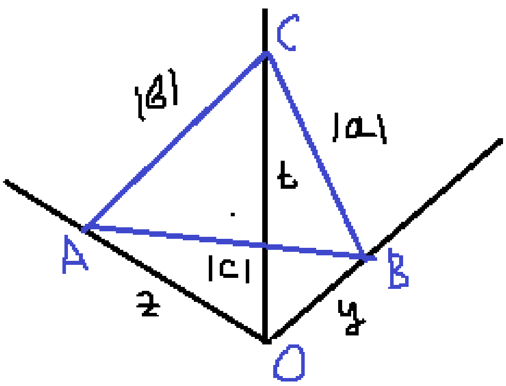
$$= \sqrt{\frac{(|a| + |b| + |c|)(|a| + |b| - |c|)(|a| + |c| - |b|)(|b| + |c| - |a|)}{3}} =$$

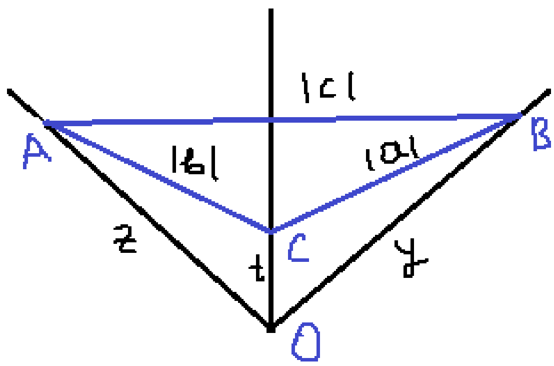
$$= \sqrt{\frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{3}}.$$

Пусть теперь одно из чисел$x$, $y$,$z$ (например, $x$)–отрицательное, а остальные два – положительные. Обозначим $t = -x$и получим систему

$$\begin{cases} t^2 - ty + y^2 = a^2 \\ t^2 - tz + z^2 = b^2, \\ y^2 + yz + z^2 = c^2 \end{cases}$$

нужно найти теперь $-ty - tz + yz$. Возьмем точку $O$ на плоскости, проведем из неё три луча, образующие два угла в$60^{\circ}$. Отложим на среднем луче отрезок $OC$длиной $t$, а на остальных двух лучах - отрезки $OA$, $OB$длиной $z$, $y$ соответственно.




Равенства системы можно снова рассматривать как результат применения теоремы косинусов к треугольникам$OCB$, $OAC$, $OAB$ соответственно. В этом случае

$$xy + xz + yz = -ty - tz + yz = \frac{4}{\sqrt{3}}(S_{AOB} - S_{AOC} - S_{BOC}) = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} S_{ABC}.$$

Если все числа $x$, $y$и $z$ отрицательные или два из них отрицательные, умножим каждое число на $-1$ и придём к разобранному случаю.

**Ответ**: $\pm\sqrt{(4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2)/3}$