РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 4 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2025-2026 учебный год)

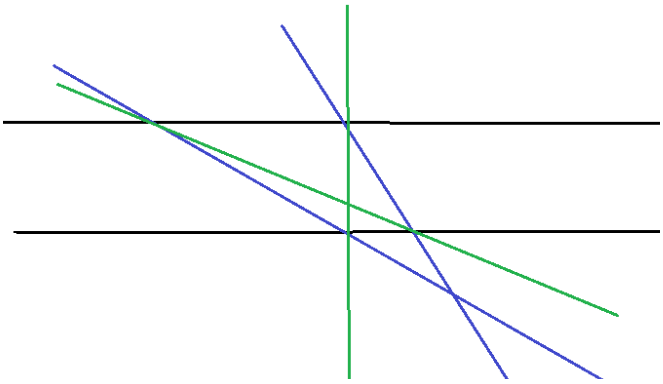
Задача 1

На двух параллельных прямых выбрали m и n точек соответственно. Каждую точку на одной прямой соединили с каждой точкой на другой прямой. Никакие две из соединяющих прямых не параллельны, и никакие три не пересекаются водной точке, не лежащей на параллельных прямых. Найдите количество точек пересечения соединяющих прямых.

Решение.Выберем две точки на одной прямой и две – на другой. Эти точки определяют четыре прямые, имеющие две точки пересечения, не лежащие на параллельных прямых. Таким образом, количество точек пересечения, не лежащих на параллельных прямых, равно удвоенному произведению количества способов, которыми можно выбрать две точки из m, на количество способов, которыми можно выбрать две точки изn:

$$2C_m^2C_n^2=\frac{m(m-1)n(n-1)}{2}.$$

Чтобы получить общее количество точек пересечения, нужно добавить точки, лежащие на параллельных прямых.



Ответ:$m(m-1)n(n-1)/2+m+n.$

Задача 2

Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек, координаты (x,y) которых удовлетворяют неравенству

$$x^2+y^2\le 8|x|-8|y|.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$x^2+y^2-8|x|+8|y|\le 0,$$
$$(|x|-4)^2+(|y|+4)^2\le 32.$$

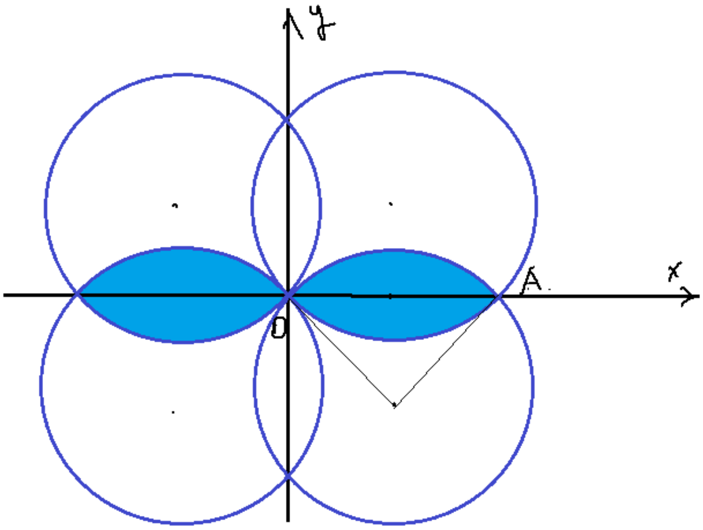
Пусть $x\ge 0$, $y\ge 0$. Тогда $(x-4)^2+(y+4)^2\le 32$, неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри сегмента окружности радиуса $4\sqrt{2}$ с центром в точке $(4,-4)$.Эта окружность пересекает ось 0x в точке $A(8,0)$. Следовательно, дуга окружности опирается на угол 90°, площадь сегмента находится как разность площади сектора и треугольника:

$$\frac{1}{4}\pi\cdot 32-\frac{1}{2}\cdot 32=8(\pi-2).$$

При$x\ge 0$, $y\le 0$неравенство принимает вид $(x-4)^2+(y-4)^2\le 32$, ему удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри сегмента окружности радиуса $4\sqrt{2}$ с центром в точке $(4,4)$.

Если $x\le 0$, $y\ge 0$, то$(x+4)^2+(y+4)^2\le 32$, этому неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри сегмента окружности радиуса $4\sqrt{2}$ с центром в точке $(-4,-4)$.

Наконец, в случае $x \le 0,\ y \le 0$ получаем $(x+4)^2 + (y-4)^2 \le 32$ и, следовательно, множество точек, лежащих внутри сегмента окружности радиуса $4\sqrt{2}$ с центром в точке $(-4,4)$.



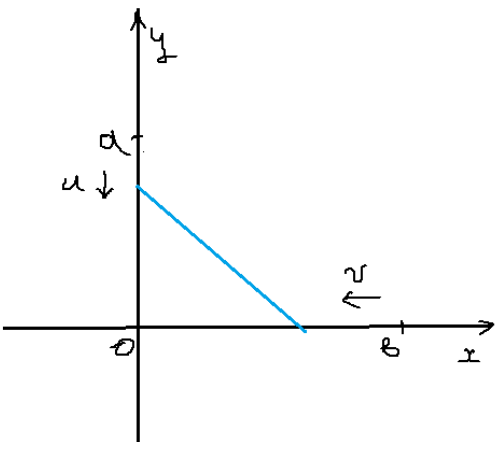
Таким образом, рассматриваемая фигура состоит из четырех одинаковых сегментов, её площадь равна $32(\pi - 2)$.

Ответ: $32(\pi - 2)$.

Задача 3

Можно считать, что улицы Большая Покровская и Воровского пересекаются под прямым углом. Алёна идет по Большой Покровской, а Полина – по Воровского со скоростями u и v соответственно в направлении перекрестка. В момент, когда Алена находилась на расстоянии a от перекрестка, Полина находилась от него на расстоянии b. Найдите кратчайшее расстояние между девочками во время их движения.

Решение. Введём на плоскости систему координат, центр которой совпадает с перекрестком, а оси направлены вдоль перпендикулярных улиц. За начало отсчета времени движения примем момент, в который Алёна находится в точке с координатами $(0, a)$, а Полина – в точке с координатами $(b, 0)$. Тогда через время t Алёна попадет в точку с координатами $(0, a - ut)$, а Полина – в точку с координатами $(b - vt, 0)$.



Расстояние между этими точками равно

$$d = \sqrt{(b - vt)^2 + (a - ut)^2}.$$

Расстояние будет кратчайшим тогда же, когда будет наименьшим его квадрат, то есть

$$d^2 = (b - vt)^2 + (a - ut)^2 = (v^2 + u^2)t^2 - 2(bv + au)t + b^2 + a^2.$$

Наименьшее значение квадратичная функция $d^2(t)$ принимает при

$$t = \frac{bv + au}{v^2 + u^2}.$$

Таким образом,кратчайшее расстояниеравно

$$\sqrt{(v^2+u^2)\left(\frac{bv+au}{v^2+u^2}\right)^2 - 2(bv+au)\left(\frac{bv+au}{v^2+u^2}\right) + b^2 + a^2} = \sqrt{\frac{(bv-au)^2}{v^2+u^2}} = \frac{|bu-av|}{v^2+u^2}.$$

Ответ: $|bu - av|/(v^2 + u^2)$.

Задача 4

Первый, второй и четвертый члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства

$$\frac{(x-4)(7-x)}{(x-8)\sqrt{(x-2)(8-x)}} \geq 0,$$

а третий, пятый и шестой члены прогрессии не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Решение. Неравенство из условия задачи равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x-4)(7-x)}{(x-8)} \geq 0 \\ (x-2)(8-x) > 0 \end{cases}$$

Решая эти неравенства методом интервалов, получаем

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 4] \cup [7; 8) \\ x \in (2; 8) \end{cases},$$

то есть $x \in (2; 4] \cup [7; 8)$.

Пусть a–первый член прогрессии, $d > 0$ – её разность. Тогда, по условию, справедливы неравенства

$$2 < a \leq 4,$$
$$2 < a + d \leq 4,$$
$$4 < a + 2d < 7,$$
$$7 \leq a + 3d < 8,$$
$$8 \leq a + 4d,$$
$$8 \leq a + 5d.$$

Очевидно, последнее неравенство следует из предпоследнего. Кроме того, если $2 < a$, то $2 < a + d$, а если $a + d \leq 4$, то $a \leq 4$. Оставшиеся неравенства решим графически.

На плоскости (d, a) рассмотрим прямые

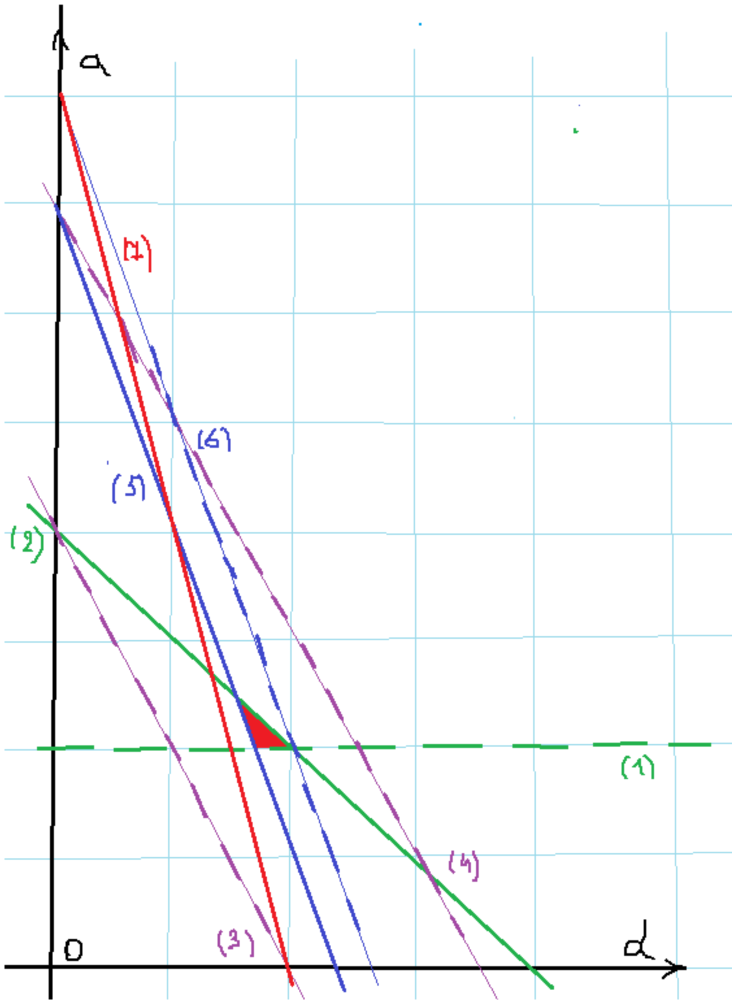
$$a = 2, (1)$$
$$a + d = 4, (2)$$
$$a + 2d = 4, (3)$$
$$a + 2d = 7, (4)$$
$$a + 3d = 7, (5)$$
$$a + 3d = 8, (6)$$
$$a + 4d = 8. (7)$$

Каждая из этих прямых разбивает плоскость на две полуплоскости, координаты точек одной из них удовлетворяют соответствующему неравенству. Решение системы неравенств – совокупность координат (d, a) точек, принадлежащих пересечению этих полуплоскостей.

Неравенствам $2 < a,\ a + d \leq 4,\ d > 0$ удовлетворяют координаты точек, расположенных внутри треугольника, образованного прямыми (1), (2) и осью $0a$ и точки стороны этого треугольника, лежащей на прямой (2).

Неравенствам $4 < a + 2d < 7$ удовлетворяют координаты точек между прямыми (3) и (4), а неравенствам $7 \le a + 3d < 8$ – координаты точек прямой (5) и координаты точек, лежащих между прямыми (5) и (6). Наконец, решение неравенства $8 \le a + 4d$ – координаты точек правой полуплоскости, образованной прямой (7).

Решение системы неравенств – координаты (d, a) точек треугольника, образованного прямыми (1), (2), (5). Верхняя вершина – пересечение прямых (2) и (5), имеет координаты $d = 1{,}5$, $a = 2{,}5$. Таким образом, $2 < a \le 2{,}5$.



Ответ:$(2;2{,}5]$.

Задача 5

Треугольник образован прямыми$x = 1$, $y = 2$, $8x - 21y + 90 = 0$. Найдите уравнение окружности, вписанной в этот треугольник, и уравнение окружности, описанной около него.

Решение. Вершины треугольника – точки пересечения прямых, то есть точки $A(1{,}2)$, $B(1{,}14/3)$, $C(-6{,}2)$. Треугольник ABC прямоугольный, длины сторонравны

$$|AB| = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}, \qquad |AC| = 6 + 1 = 7, \qquad |BC| = \sqrt{7^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{505}}{3}.$$

Чтобы записать уравнение окружности, нужно знать координаты центра окружности и её радиус.

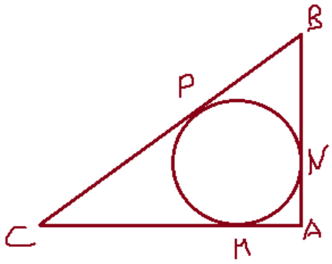
Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, bи гипотенузой c можно найти по формуле

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

В самом деле, пусть точки M, N, P – точки касания вписанной окружности. Тогда $AM = AN = r$, $MC = CP = a - r$, $NB = BP = b - r$. Получаем

$$CP + PB = a + b - 2r = c,$$

откуда следует доказываемая формула.



Таким образом,

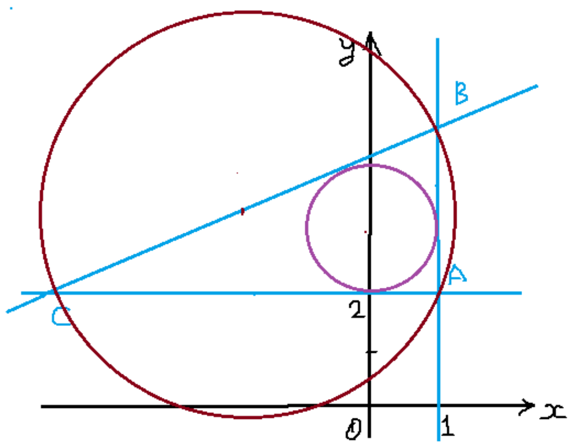
$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + 7 - \frac{\sqrt{505}}{3}\right) = \frac{29 - \sqrt{505}}{6}.$$

Центр вписанной окружности расположен на расстоянии r от катетов, то есть имеет координаты

$$x = 1 - \frac{29 - \sqrt{505}}{6} = \frac{\sqrt{505} - 23}{6}, \qquad y = 2 + \frac{29 - \sqrt{505}}{6} = \frac{41 - \sqrt{505}}{6}.$$

Уравнение вписанной окружности –

$$\left(x + \frac{23 - \sqrt{505}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{41 - \sqrt{505}}{6}\right)^2 = \left(\frac{29 - \sqrt{505}}{6}\right)^2$$



Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности расположен в середине гипотенузы, её радиус равен половине длины гипотенузы. Таким образом,

$$x = \frac{-6+1}{2} = -\frac{5}{2}, \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3} + 2\right) = \frac{10}{3}, \qquad R = \frac{\sqrt{505}}{6}.$$

Уравнение описанной окружности –

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{505}{36}.$$

Ответ:

$$\left(x + \frac{23 - \sqrt{505}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{41 - \sqrt{505}}{6}\right)^2 = \left(\frac{29 - \sqrt{505}}{6}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{505}{36}.$$