7 класс

Задание № 5

Задача 1

Собака, находясь в точке A, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 м от собаки. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы – 1 м. Собака делает два скачка в то время, как лисица делает три скачка. На каком расстоянии от A собака догонит лисицу?

Решение

Обозначим за y временной промежуток, за который собака делает два скачка, а лисица делает три скачка. В начальный момент времени собака и лисица находятся на расстоянии 30 м друг от друга. За время y собака преодолеет расстояние, равное $2\cdot 2 = 4$(м), а лисица – $3\cdot 1 = 3$(м), то есть собака приблизится к лисице на $4 – 3 = 1$(м). Чтобы догнать лисицу, собака должна приблизиться к ней на 30 м, затратив на это время в 30 раз больше, чем y, то есть $30y$. За время $30y$ собака преодолеет расстояние, равное, $30\cdot 4 = 120$(м), значит, в тот момент, когда собака догонит лисицу, она будет находиться на расстоянии 120 м от точки A.

Ответ. 120 м.

Задача 2

Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $\frac{(a-2)(x+5a-2)}{x^2-4}=0$ и $a^2x - a + 2 = x + 3a^2$ равносильны.

Решение.

Два уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают, то есть каждый корень первого уравнения является корнем второго, и каждый корень второго уравнения является корнем первого. Уравнения, не имеющие корней, являются равносильными.

Решим сначала каждое из уравнений с параметром.

$$\frac{(a-2)(x+5a-2)}{x^2-4}=0;$$

$$\begin{cases}(a-2)(x+5a-2)=0,\\ x^2-4\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-2)(x+5a-2)=0,\\ (x-2)(x+2)\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-2)(x+5a-2)=0,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2.\end{cases}$$

При $a = 2$ система принимает вид $\begin{cases} 0\cdot(x+8)=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$ Решением системы являются все значения x, кроме 2 и –2, то есть при $a = 2$ $x \neq \pm 2$.

При $a \neq 2$ система принимает вид $\begin{cases} x = 2-5a, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$ Если $2 - 5a = 2$, $5a = 0$, $a = 0$, то система решений не имеет. Если $2 - 5a = -2$, $5a = 4$, $a = 0{,}8$, то система решений не имеет. Если $a \neq 2$, $a \neq 0$ и $a \neq 0{,}8$, то $x = 2 - 5a$.

Таким образом, при $a = 0$ или $a = 0{,}8$ первое уравнение решений не имеет; при $a = 2$ корнями первого уравнения являются все действительные значения x, кроме 2 и –2, то есть $x \neq \pm 2$; при $a \neq 2$, $a \neq 0$ и $a \neq 0{,}8$ первое уравнение имеет единственный корень $x = 2 - 5a$.

$$a^2x - a + 2 = x + 3a^2;$$
$$a^2x - x = 3a^2 + a - 2;$$
$$(a^2 - 1)x = 3a^2 + 3a - 2a - 2;$$
$$(a - 1)(a + 1)x = 3a(a + 1) - 2(a + 1);$$
$$(a - 1)(a + 1)x = (3a - 2)(a + 1).$$

Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $0\cdot x = 0$, решением которого является любое действительное значение x.

Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0\cdot x = 2$, полученное уравнение корней не имеет.

Если $a \neq \pm 1$, то уравнение имеет один корень $x = \dfrac{3a-2}{a-1}$.

Таким образом, при $a = -1$ корнями второго уравнения являются все действительные значения x; при $a = 1$ второе уравнение корней не имеет; при $a \neq \pm 1$ второе уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{3a-2}{a-1}$.

Сравним теперь полученные решения уравнений.

При $a = 0$ и при $a = 0{,}8$ первое уравнение корней не имеет, а у второго уравнения единственный корень, поэтому уравнения равносильными не являются.

При $a = 1$ и первое уравнение имеет единственный корень, а второе уравнение корней не имеет, поэтому уравнения равносильными не являются.

При $a = -1$ первое уравнение имеет единственный корень, а второе уравнение имеет бесконечно много корней, поэтому уравнения равносильными не являются.

При $a = 2$ первое уравнение имеет бесконечно много корней, а второе уравнение имеет один корень, поэтому уравнения равносильными не являются.

При $a \neq 0$, $a \neq 0{,}8$, $a \neq 2$, и $a \neq \pm 1$ оба уравнения имеют по одному корню. Чтобы уравнения были равносильными, их корни должны совпадать. Значит, значения параметра a, при которых уравнения являются равносильными, удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq \pm 1, \\ a \neq 2, \\ a \neq 0{,}8, \\ 2-5a = \dfrac{3a-2}{a-1}. \end{cases}$$

Решим уравнение $2-5a = \dfrac{3a-2}{a-1}$.

$$\begin{cases} (2-5a)(a-1) = 3a-2, \\ a-1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5a^2+7a-2 = 3a-2, \\ a-1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5a^2+4a = 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a(5a-4) = 0, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0,\ a = 0{,}8, \\ a \neq 1; \end{cases}$$

$a = 0$, $a = 0{,}8$.

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq \pm 1, \\ a \neq 0{,}8, \\ a \neq 2, \\ a = 0,\ a = 0{,}8. \end{cases}$$

Система решений не имеет.

Таким образом, нет значений параметра, при которых уравнения $\dfrac{(a-2)(x+5a-2)}{x^2-4} = 0$ и $a^2x - a + 2 = x + 3a^2$ являются равносильными.

Ответ. Нет таких a.

Задача 3

Упростите выражение $\left(\frac{16a^2-24a+9}{9-16a^2}+\frac{1}{4a^2+3a}\right):\left(\frac{7}{9a+12}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{a}$ и укажите, при каких значениях a это выражение имеет смысл.

Решение.

Найдем значения a, при которых выражение имеет смысл.

$$\begin{cases} 9-16a^2\neq 0, \\ 4a^2+3a\neq 0, \\ 9a+12\neq 0, \\ a\neq 0, \\ \frac{7}{9a+12}-\frac{1}{3}\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-4a)(3+4a)\neq 0, \\ a(4a+3)\neq 0, \\ 9a\neq -12, \\ a\neq 0, \\ \frac{9-9a}{3(3a+4)}\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-4a\neq 0, \\ 3+4a\neq 0, \\ a\neq 0, \\ a\neq -\frac{4}{3}, \\ 9-9a\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\neq 0{,}75, \\ a\neq -0{,}75, \\ a\neq 0, \\ a\neq -\frac{4}{3}, \\ a\neq 1. \end{cases}$$

Выражение имеет смысл при всех значениях a, кроме 0, 1, 0,75, –0,75 и $-\frac{4}{3}$.

Упростим выражение.

$$\left(\frac{16a^2-24a+9}{9-16a^2}+\frac{1}{4a^2+3a}\right):\left(\frac{7}{9a+12}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{a}=$$

$$=\left(\frac{(3-4a)^2}{(3-4a)(3+4a)}+\frac{1}{a(4a+3)}\right):\frac{9-9a}{3(9a+12)}-\frac{1}{a}=\left(\frac{3-4a}{3+4a}+\frac{1}{a(4a+3)}\right)\cdot\frac{9(3a+4)}{9(1-a)}-\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{3a-4a^2+1}{a(4a+3)}\cdot\frac{3a+4}{1-a}-\frac{1}{a}=\frac{3a-3a^2-a^2+1}{a(4a+3)}\cdot\frac{3a+4}{1-a}-\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{3a(1-a)+(1-a^2)}{a(4a+3)}\cdot\frac{3a+4}{1-a}-\frac{1}{a}=\frac{3a(1-a)+(1-a)(1+a)}{a(4a+3)}\cdot\frac{3a+4}{1-a}-\frac{1}{a}=$$

$$=\frac{(4a+1)(1-a)}{a(4a+3)}\cdot\frac{3a+4}{1-a}-\frac{1}{a}=\frac{(4a+1)(3a+4)}{a(4a+3)}-\frac{1}{a}=\frac{(4a+1)(3a+4)-(4a+3)}{a(4a+3)}=$$

$$=\frac{12a^2+19a+4-4a-3}{a(4a+3)}=\frac{12a^2+15a+1}{a(4a+3)}.$$

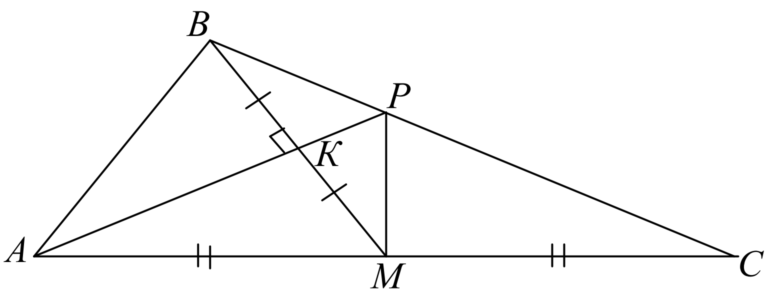
Ответ. $\left(\frac{16a^2-24a+9}{9-16a^2}+\frac{1}{4a^2+3a}\right):\left(\frac{7}{9a+12}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{a}=\frac{12a^2+15a+1}{a(4a+3)}$;

выражение имеет смысл при $a\neq\pm0{,}75$, $a\neq0$, $a\neq1$ и $a\neq-\frac{4}{3}$.

Задача 4

В треугольнике *ABC* прямая *AK* перпендикулярна медиане *BM* и делит ее точкой *K* пополам. Точка *P* – точка пересечения *AK* и *BC*. Угол *A* треугольника *ABC* в два раза больше угла *C*. Докажите, что *PM* является высотой треугольника *PAC*.

Решение.



В треугольнике *ABM* *AK* является высотой и медианой, значит, ΔABM – равнобедренный с основанием *BK* (по признаку), следовательно, *AK* – биссектриса ΔABM (по свойству равнобедренного треугольника), то есть $\angle BAK = \angle KAM = 0{,}5\angle BAM$.

Так как $\angle BAC = 2\angle C$ по условию задачи, то $\angle PAC = 0{,}5\angle BAC = \angle C$, значит, ΔPAC – равнобедренный с основанием *AC* (по признаку). Так как *BM* – медиана ΔABC, то *M* – середина *AC*, значит, *PM* – медиана ΔPAC, следовательно, *PM* – высота ΔPAC (по свойству равнобедренного треугольника), **что и требовалось доказать.**

Задача 5

В бригаде 6 человек и их суммарный возраст 285 лет. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

Решение.

Разобьем 6 человек на две группы по три человека в каждой. Если суммарный возраст в каждой тройке меньше 142 лет, тогда суммарный возраст всех человек в бригаде меньше $142 + 142 = 284$(года), что противоречит условию. Значит, суммарный возраст хотя бы в одной тройке не меньше 142 лет, **что и требовалось доказать.**