8 класс

Задание № 5

Задача 1

Удовлетворяет ли число $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ неравенству $11x^2 + 26x - 73 \le 0$? (Ответ обосновать.)

Решение

Сначала упростим выражение $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$:

$$9-4\sqrt{5}=5-2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+4=(\sqrt{5})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+2^2=(\sqrt{5}-2)^2;$$

$$9+4\sqrt{5}=5+2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+4=(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+2^2=(\sqrt{5}+2)^2;$$

тогда $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}=\left|\sqrt{5}-2\right|-\left|\sqrt{5}+2\right|$. Так как, $2=\sqrt{4}$, $5 > 4$, то $\sqrt{5}>2$, значит, $\sqrt{5}-2>0$, следовательно, $\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$; $\sqrt{5}+2>0$, следовательно, $\left|\sqrt{5}+2\right|=\sqrt{5}+2$; тогда $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}=$ $=\left|\sqrt{5}-2\right|-\left|\sqrt{5}+2\right|=\sqrt{5}-2-(\sqrt{5}+2)=\sqrt{5}-2-\sqrt{5}-2=-4$.

Проверим, удовлетворяет ли число $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}=-4$ неравенству $11x^2 + 26x - 73 \le 0$:

при $x = -4$ $11x^2 + 26x - 73 = 11\cdot(-4)^2 + 26\cdot(-4) - 73 = -4\cdot(11\cdot(-4) + 26) - 73 =$ $= -4\cdot(-18) - 73 = 72 - 73 = -1$, $-1 \le 0$, следовательно, число $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ удовлетворяет неравенству $11x^2 + 26x - 73 \le 0$.

Ответ. Число $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ удовлетворяет неравенству $11x^2 + 26x - 73 \le 0$.

Задача 2

Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых существует только одно значение *x*, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое уравнение системы:

$$|x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0.$$

Найдем значения *x*, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в 0.

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$, так как сумма коэффициентов уравнения равна 0: 1 – 5 + 4 = 0, то 1 является корнем уравнения, то есть $x_1 = 1$, а по теореме Виета произведение корней уравнения $x_1 \cdot x_2 = 4$, значит, $x_2 = 4$.

2) $x = 0$.

Точки $x = 0$, $x = 1$ и $x = 4$ разбивают числовую ось на четыре промежутка. Определим знаки выражений, стоящих под знаком модуля, на каждом из получившихся промежутков:

$x^2 - 5x + 4$	+	•	+	•	–	•	+	→
x	–	0	+	1	+	– 4	+	x

Решим уравнение на каждом из получившихся промежутков. Так как на втором и четвертом промежутках первое и второе выражения принимают положительные значения, то эти промежутки можно рассматривать одновременно, так как оба модуля будут раскрываться с одинаковым знаком.

1) $\begin{cases} x \le 0, \\ (x^2 - 5x + 4) - 9x^2 - 5x + 4 + 10x \cdot (-x) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 0, \\ -8x^2 - 10x + 8 - 10x^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 0, \\ -18x^2 - 10x + 8 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 0, \\ 9x^2 + 5x - 4 = 0. \end{cases}$

Решим квадратное уравнение $9x^2 + 5x - 4 = 0$. Так как сумма первого и третьего коэффициентов уравнения равна второму коэффициенту: 9 + (–4) = 5, то корнем уравнения является (–1), то есть $x_1 = -1$, а по теореме Виета произведение корней уравнения $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-4}{9}$, значит, $x_2 = \dfrac{4}{9}$.

$\begin{cases} x \le 0, \\ x = -1,\ x = \dfrac{4}{9}; \end{cases}$

$x = -1$.

2) $\begin{cases} 0 < x < 1,\ x > 4, \\ (x^2 - 5x + 4) - 9x^2 - 5x + 4 + 10x \cdot x = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 1,\ x > 4, \\ x^2 - 5x + 4 - 9x^2 - 5x + 4 + 10x^2 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 1,\ x > 4, \\ 2x^2 - 10x + 8 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 1,\ x > 4, \\ x^2 - 5x + 4 = 0; \end{cases}$ уравнение системы решено выше,

$$\begin{cases} 0 < x < 1,\ x > 4, \\ x = 1,\ x = 4. \end{cases}$$

Система решений не имеет.

3) $$\begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ -(x^2 - 5x + 4) - 9x^2 - 5x + 4 + 10x \cdot x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ -x^2 + 5x - 4 - 9x^2 - 5x + 4 + 10x^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Так как уравнение системы обратилось в верное числовое равенство, то решением уравнения являются все действительные числа, а решением системы будут все x, удовлетворяющие неравенству $1 \le x \le 4$.

Таким образом, решениями уравнения $|x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0$ являются $x = -1$, $1 \le x \le 4$.

Решим второе уравнение системы:

$$x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0.$$

Воспользуемся теоремой Виета. По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a - 2, \\ x_1 \cdot x_2 = a(a-2). \end{cases}$ Так как $a + (a - 4) = 2a - 2$, то $x_1 = a - 2$, $x_2 = a$. Так как $a > a - 2$ при всех действительных значениях a, то квадратное уравнение с параметром $x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0$ при любом действительном a имеет два различных действительных корня $x = a - 2$, $x = a$.

Таким образом, система уравнений $\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0. \end{cases}$ принимает вид $\begin{cases} x = -1,\ 1 \le x \le 4, \\ x = a - 2,\ x = a. \end{cases}$

Чтобы система имела одно решение, один из корней второго уравнения должен удовлетворять первому уравнению, а другой – нет. Значит, система имеет одно решение в четырех случаях:

1) $a - 2$ совпадет с -1, а a не принадлежит отрезку [1; 4];
2) a совпадет с -1. В этом случае, так как $a > a - 2$, $a - 2$ не принадлежит отрезку [1; 4];
3) $a - 2$ принадлежит отрезку [1; 4], а a больше 4 (так как $a > a - 2$);
4) a принадлежит отрезку [1; 4], а $a - 2$ меньше 1 и не совпадает с (-1) (так как $a > a - 2$).

Второй случай сразу дает одно из искомых значений параметра $a = -1$. Составим и решим три системы ограничений на параметр, решения которых и являются остальными искомыми значениями параметра a.

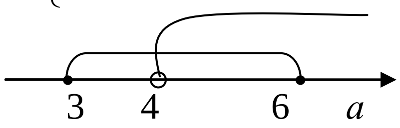
1) $\begin{cases} a-2=-1, \\ a<1,\ a>4; \end{cases}$

$\begin{cases} a=1, \\ a<1,\ a>4. \end{cases}$

Система решений не имеет.

3) $\begin{cases} 1\le a-2\le 4, \\ a>4; \end{cases}$

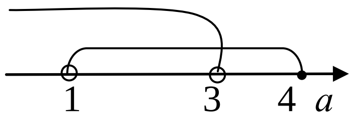
$\begin{cases} 3\le a\le 6, \\ a>4. \end{cases}$



$4 < a \le 6.$

4) $\begin{cases} 1\le a\le 4, \\ a-2<1, \\ a-2\ne -1; \end{cases}$

$\begin{cases} 1\le a\le 4, \\ a<3, \\ a\ne 1. \end{cases}$



$1 < a < 3.$

Ответ. $a = -1$, $1 < a < 3$, $4 < a \le 6$.

Задача 3

Постройте график функции $y=\dfrac{x^2+4x}{x-1+|x+1|}$ и укажите для функции:

– область определения;

– те значения функции, которые она принимает ровно в двух различных точках области определения;

– те значения функции, которые она принимает ровно в трех различных точках области определения.

Решение.

Найдем область определения функции $y=\dfrac{x^2+4x}{x-1+|x+1|}$. Так как числитель и знаменатель дроби существуют при всех действительных значениях x, то функция определена во всех точках x, кроме тех, в которых знаменатель обращается в 0. Найдем, при каких значениях x знаменатель равен 0:

$$x-1+|x+1|=0;$$

$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ x-1+(x+1)=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge -1, \\ 2x=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge -1, \\ x=0; \end{cases}$

$x = 0.$

$\begin{cases} x+1<0, \\ x-1+(-(x+1))=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x<-1, \\ x-1-x-1=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x<2, \\ -2=0. \end{cases}$

Так как уравнение системы обратилось в неверное числовое равенство, то система решений не имеет.

Таким образом, область определения функции $y=\dfrac{x^2+4x}{x-1+|x+1|}$ состоит из всех действительных значений x, кроме $x = 0$: $D(y) = \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$.

Чтобы построить график функции, преобразуем выражение $\dfrac{x^2+4x}{x-1+|x+1|}$:

при $-1 \le x < 0$, $x > 0$ $\quad \dfrac{x^2+4x}{x-1+|x+1|}=\dfrac{x^2+4x}{x-1+x+1}=\dfrac{x^2+4x}{2x}=\dfrac{1}{2}(x+4)$;

при $x < -1$, $\quad \dfrac{x^2+4x}{x-1+|x+1|}=\dfrac{x^2+4x}{x-1-(x+1)}=\dfrac{x^2+4x}{x-1-x-1}=-\dfrac{1}{2}(x^2+4x)$.

Таким образом, $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x^2+4x) \;\; \textit{при} \;\; x<-1; \\ \dfrac{1}{2}(x+4) \qquad \textit{при} \; -1\le x<0, \;\; x>0.\end{cases}$ Следовательно, график функции $y=\dfrac{x^2+4x}{x-1+|x+1|}$ состоит из части параболы $y = -\dfrac{1}{2}(x^2+4x)$, соответствующей значениям $x<-1$, и части прямой $y = \dfrac{1}{2}(x+4)$, соответствующей значениям $-1 \le x < 0$, $x > 0$.

Чтобы построить параболу, нужно найти координаты ее вершины. Для нахождения координат вершины параболы в выражении $\dfrac{1}{2}(x^2+4x)$ выделим полный квадрат относительно x:

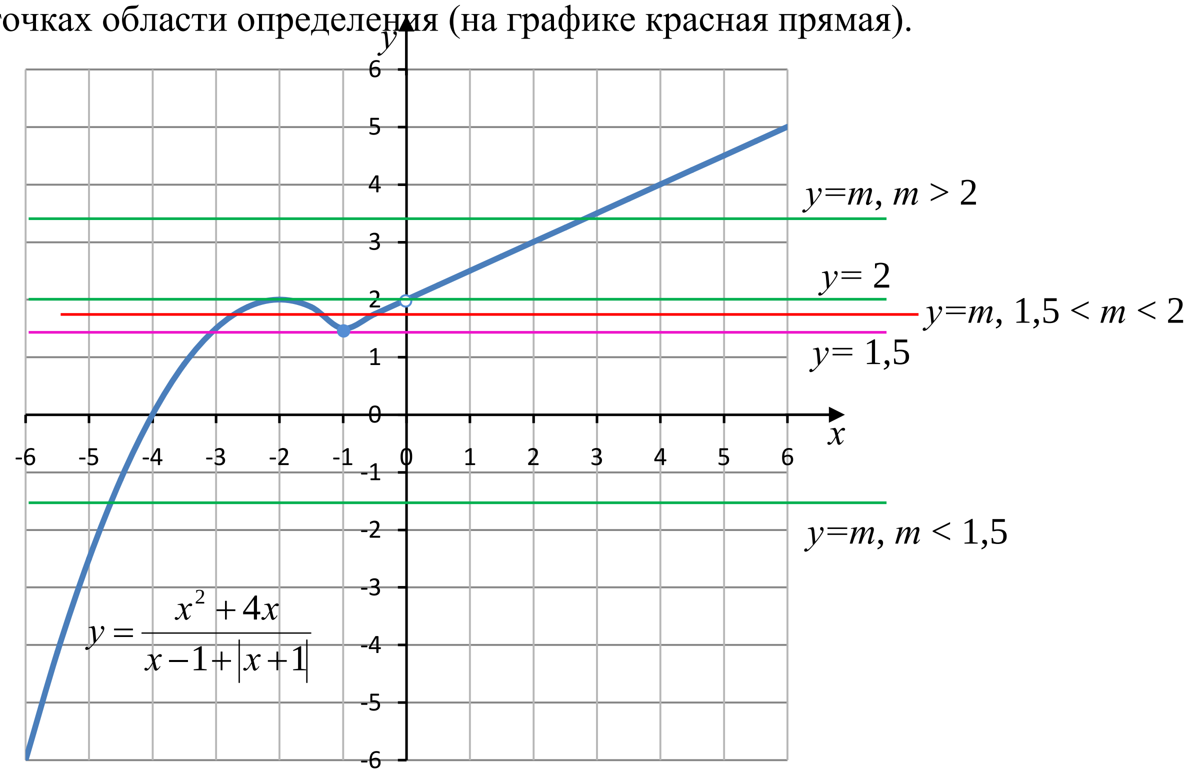
$$-\frac{1}{2}(x^2+4x)=-\frac{1}{2}((x^2+4x+4)-4)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2,$$

следовательно, вершина параболы имеет координаты (–2; 2), ветви параболы направлены вниз, парабола пройдет через точку (–4; 0) и точку (–1; 1,5), так как $y(-1) = 1{,}5$. Для построения прямой достаточно знать координаты двух точек, принадлежащих этой прямой: $y = \dfrac{1}{2}(x+4)$, $y(-1) = 1{,}5$; $y(2) = 3$ и, так как $y(0) = 2$, то графику функции не принадлежит точка с координатами (0; 2).

Чтобы найти, какие значения принимает функция и в скольких значениях x, будем проводить прямые $y = m$, параллельные оси Ox. При $m > 2$, $m < 1{,}5$ прямая $y = m$ пересекает график функции в одной точке, следовательно, значения $y > 2$, $y < 1{,}5$ функция принимает ровно в одной точке области определения. Прямая $y = 2$ также имеет с графиком функции ровно одну общую точку, так как точка с координатами (0; 2) графику функции не принадлежит, следовательно, значение $y = 2$ функция принимает ровно в одной точке области определения (на графике зеленые прямые).

Прямая $y = 1{,}5$ имеет с графиком функции две общие точки, следовательно, значение $y = 1{,}5$ функция принимает ровно в двух различных точках области определения (на графике розовая прямая).

При $1{,}5 < m < 2$ прямая $y = m$ пересекает график функции в трех точках, следовательно, значения $1{,}5 < y < 2$ функция принимает ровно в трех различных точках области определения (на графике красная прямая).



Ответ. Область определения функции $D(y) = \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$;

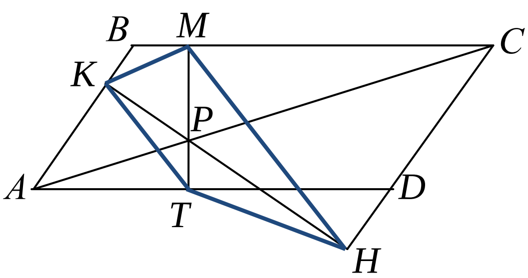
значение $y = 1{,}5$ функция принимает ровно в двух различных точках области определения;

значения $1{,}5 < y < 2$ функция принимает ровно в трех различных точках области определения.

Задача 4

На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры. Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

Решение.



На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ выберем точку P так, что $AP \neq PC$. Из точки P опустим перпендикуляры PK на прямую AB, PM на прямую BC, PH на прямую CD, PT на прямую AD. По определению параллелограмма $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, тогда, в силу того, что $PK \perp AB$, $PK \perp CD$ и $PH \perp CD$, значит, точки P, K и H лежат на одной прямой (так как из любой точки плоскости можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной прямой). Аналогично, точки P, M и T лежат на одной прямой.

Рассмотрим треугольники AKP и CHP. $\angle AKP = \angle CHP = 90°$, $\angle PAK = \angle PCH$ как накрестлежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC, значит, $\Delta AKP \sim \Delta CHP$ по двум углам, следовательно, $\frac{AP}{CP} = \frac{KP}{HP}$ и, так как $AP \neq PC$, то $KP \neq PH$. Аналогично из того, что $\Delta ATP \sim \Delta CMP$ получим, что $\frac{AP}{CP} = \frac{TP}{MP}$.

Рассмотрим треугольники KPT и HPM. $\angle KPT = \angle HPM$ как вертикальные, $\frac{AP}{CP} = \frac{KP}{HP} = \frac{TP}{MP}$, значит, $\Delta KPT \sim \Delta HPM$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle PKT = \angle PHM$. Но $\angle PKT$ и $\angle PHM$ накрестлежащие при прямых KT и MH и секущей KH, значит, $KT \parallel MH$ по признаку параллельности прямых. Тогда $KMHT$ является параллелограммом или трапецией.

Если $KMHT$ – параллелограмм, то $KP = PH$ по свойству параллелограмма, что противоречит доказанному $KP \neq PH$. Значит, $KMHT$ – трапеция, **что и требовалось доказать.**

Задача 5

Даны 4 синих и 4 красных палочки, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить четырехугольник, и из красных — тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю — в красный цвет, а красную — в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить четырехугольник, и из красных — тоже? (Ответ обосновать.)

Решение.

В задачах такого типа может быть два варианта ответа. Если дается ответ «всегда», то нужно доказать, что для любого набора палочек, удовлетворяющих условию задачи, всегда можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю — в красный цвет, а красную — в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить четырехугольник, и из красных — тоже. Если дается ответ «не всегда», то нужно привести пример набора палочек, удовлетворяющих условию задачи, таких, что какую бы пару палочек мы не поменяли местами (любую одну красную палочку перекрасили в синий цвет и любую одну синюю палочку перекрасили в красный цвет), из одного из новых наборов не получится сложить четырехугольник.

Рассмотрим два набора палочек. Пусть красные палочки имеют длины 1, 1, 47, 48, а синие палочки имеют длины 12, 12, 29, 44. Тогда $1 + 1 + 47 + 48 = 97$, $12 + 12 + 29 + 44 = 97$. Чтобы из четырех палочек можно было сложить четырехугольник, длина самой большой палочки должна быть меньше суммы длин остальных трех палочек. $48 < 47 + 1 + 1 = 49$, $44 < 12 + 12 + 29 = 53$, значит, из обоих наборов можно сложить четырехугольник.

Если в синий цвет перекрасить палочку длиной в 47 или 48, то, перекрасив в красный цвет любую из синих палочек, сумма длин трех коротких красных палочек будет не больше, чем $1 + 1 + 44 = 46 < 47$, значит, из нового набора красных палочек четырехугольник сложить не получится.

Тогда в синий цвет будем перекрашивать палочку длиной 1. Если в красный цвет перекрасить палочку длины 12, то сумма длин трех коротких синих палочек будет равна $1 + 12 + 29 = 42 < 44$, значит, из нового набора синих палочек четырехугольник сложить не получится. Если в красный цвет перекрасить палочку длины 29 или 44, то сумма длин трех коротких синих палочек будет равна $1 + 12 + 12 = 25 < 29$, значит, из нового набора синих палочек четырехугольник сложить не получится.

Таким образом получили, что как бы мы не перекрасили две из имеющихся палочек, то из одного нового набора четырехугольник сложить не получится.

Ответ. Не всегда.