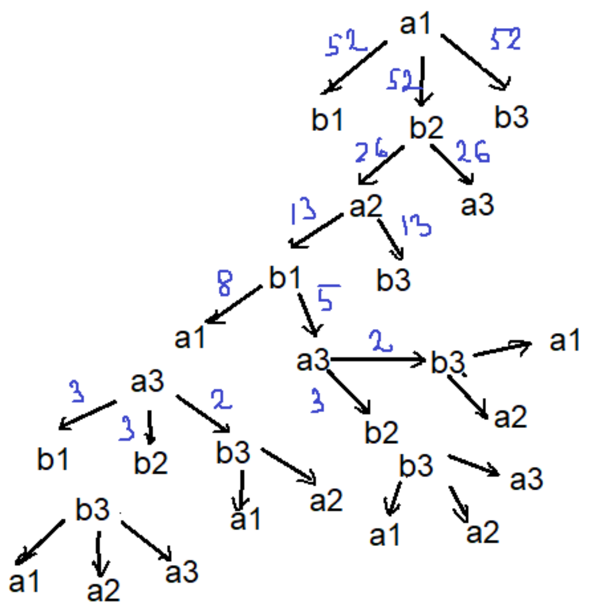
РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ 5 ДЛЯ 9-го КЛАССА
(2025-2026 учебный год)

Задача 1

Компания состоит из трех парней и трех девушек. На двадцать третье февраля каждая из девушек подарила носки одному из парней, а на восьмое марта каждый парень вручилцветы и конфеты одной из девушек. Найдите вероятность того, что никто в компании не получил подарок от того человека, которого поздравил сам, если выбор одаряемого был случаен.

Решение

Каждый из шести человек поздравил одного из трех человек. Поэтому общее количество вариантовраспределения подарков равно $3^6 = 729$. Обозначим девушек a_1, a_2, a_3, а парней - b_1, b_2, b_3. Для подсчета количества вариантов распределения подарков, при которых никто не получает подарок от того, кого поздравил сам, составим дерево, вершинами которого соответствуют людям, а стрелки ведут от одаряющего к одаряемому. Начнем с девушки a_1. Она может поздравить с равной вероятностью b_1, b_2, b_3. Количество вариантов для каждого из трех случаев одинаково, поэтому достаточно рассмотреть ситуацию, когда a_1 вручает подарок b_2. Юноша b_2может с равной вероятностью поздравить a_2и a_3, рассматриваем далее выбор b_2 - a_2, затем - a_2 - b_1.



Находим далее 8 вариантов распределения подарков, соответствующих выбору b_1- a_1 и 5 вариантов для выбора b_1- a_3.
Таким образом, общее количество благоприятствующих исходов равно $52 \cdot 3 = 156$, а искомая вероятность -

$$\frac{156}{729} = \frac{52}{243} \approx 0{,}214.$$

Ответ:$52/243$.

Задача 2

У каждого из учеников 9 «А» есть хотя бы одно домашнее животное (кошка, собака или хомячок). Ни у кого не живут одновременно собака и хомячок, но у половины владельцев кошек есть ещё один питомец. Только по одному животному имеется у тринадцати ребят. Девочек, у которых живет только кошка, в два раза больше чем тех учеников класса, у которых живет только собака, и в четыре раза больше тех, у кого есть только хомячок. Количество мальчиков, у которых живет только кошка, в целое числораз больше количестватех учеников класса, у которых есть только хомячок. Определите, сколько человек в классе.

Решение

Пусть только кошка живет у k_1 девочек и k_2мальчиков, только собака – у dучеников, только хомяк – у hучеников. По условию задачи,

$$k_1 + k_2 + d + h = 13,$$
$$k_1 = 2d = 4h,$$

$k_2 = mh,$ гдеm – целое число.
Получаем,$d = 2h,$

$$h(4 + m + 2 + 1) = 13.$$

Так как число 13 – простое, $h = 1,\ m = 6$. Таким образом, учеников, у которых есть только кошка – $6 + 4 = 10$и по условию у такого же количества человек два питомца. Следовательно, в классе $13 + 10 = 23$человека.

Ответ: 23.

Задача 3

После зимних каникул Вася решил готовиться к экзаменам по математике, решая каждый месяц одинаковое количество задач, выложенных на интернет-портале. В середине января, когда Вася начал подготовку, банк заданий состоял из 9375 задач. Первого числа каждого месяца количество задач увеличивается на 20 процентов. Какое наименьшее количество задач пришлось бы решать Васе ежемесячно, если бы он захотел однажды решить все имеющиеся к этому моменту задачи?

Решение

Пусть Вася решает xзадач в месяц. Тогда через $n + 0{,}5$ месяцевпроизойдёт nувеличений количества задач. Таким образом, Вася решит все имеющиеся задачи за $n + 0{,}5$ месяцев (а за $(n-1) + 0{,}5$, соответственно, не решит), если выполняются неравенства

$$x(n + 0{,}5) \geq 9375 \cdot 1{,}2^n,$$
$$x(n - 0{,}5) < 9375 \cdot 1{,}2^{n-1}.$$

Умножая второе неравенство на 1,2 и сравнивая с первым, получаем

$$1{,}2x(n - 0{,}5) < x(n + 0{,}5),$$

то есть $0{,}2n < 1{,}1,\ n \leq 5$.
Так как значение xминимально, если n максимально, $n = 5$ и, следовательно,

$$x \cdot 5{,}5 \geq 9375 \cdot 1{,}2^5,$$
$$x \geq 9375 \cdot \frac{6^5}{5^5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6^6}{11} = 4241\frac{5}{11}.$$

Считая x целым числом, получаем ответ.

Ответ: 4242.

Задача 4

При каких значениях aуравнение

$$|x| + \left|\frac{2x-1}{3x-2}\right| = a$$

имеет ровно три решения?

Решение

Обозначим $t = (2x-1)/(3x-2)$. Тогда $x = (2t-1)/(3t-2)$и

$$|x| + \left|\frac{2x-1}{3x-2}\right| = |t| + \left|\frac{2t-1}{3t-2}\right|.$$

Таким образом, если x– решение уравнения, то t–тоже решение уравнения, и нечетное количество решений возможно, только если $t = x$для некоторого решения x.

$$\frac{2x-1}{3x-2} = x,$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$x = 1 \text{или } x = 1/3.$$

Подставляя найденные значения в уравнение, получаем, что $a = 2$ или $a = 2/3$.
Умножим обе части уравнения на $|3x-2|$:

$$|x||3x-2| + |2x-1| = a|3x-2|,$$

Раскроем модули.
При $x < 0$ получаем $3x^2 + x(3a-4) + 1 - 2a = 0$,
$x = -\left(1+\sqrt{10}\right)/3$, если $a = 2$ и $x = \left(1-\sqrt{2}\right)/3$, если $a = 2/3$.
При $0 \le x < 1/2$ и $x \ge 2/3$получаем $3x^2 - 3ax + 2a - 1 = 0$,
$x = 1$, если $a = 2$ и$x = 1/3$, если $a = 2/3$.
Наконец, если $1/2 \le x < 2/3$, то $3x^2 - x(3a+4) + 2a + 1 = 0$,
$x = \left(5-\sqrt{10}\right)/3$при $a = 2$и $x = \left(3-\sqrt{2}\right)/3$ при $a = 2/3$.
Таким образом, при каждом из двух найденных значениях параметра уравнение имеет ровно три решения.

Ответ:2, 2/3.

Задача 5

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Найти целую часть числа$\sqrt{29^2 + \sqrt{9 \cdot 29^2 + \sqrt{36 \cdot 29^2 + 24 \cdot 29 + 5}}}$.

Решение

Обозначим $a = 29$. Число примет вид

$$x = \sqrt{a^2 + \sqrt{9a^2 + \sqrt{36a^2 + 24a + 5}}}$$

Так как $36a^2 + 24a + 5 = (6a+2)^2 + 1$,

$$6a + 2 < \sqrt{36a^2 + 24a + 5} < 6a + 3,$$

$$(3a+1)^2 + 1 < 9a^2 + \sqrt{36a^2 + 24a + 5} < (3a+1)^2 + 2,$$

$$(a+1)^2 < a^2 + 3a + 1 < a^2 + \sqrt{9a^2 + \sqrt{36a^2 + 24a + 5}} < a^2 + 3a + 2 = (a+2)^2,$$

$$a + 1 < x < a + 2,$$

то есть $30 < x < 31$.

Ответ: 30.